

ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE

BAND 73

DER GANZEN REIHE 380. BAND

KURATORIUM:
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT NEUN TAFELN UND
DEM BILDNIS VON L. W. GILBERT



I 9 2 4

LEIPZIG · VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

AMERICAN

PHYSICS

BY
JOHN W. JOHNSON
OF THE
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

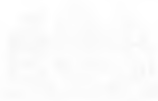


NEW YORK
WILEY & SONS
1898

PHYSICS

FOR THE USE OF

TEACHERS AND STUDENTS



MADE IN THE U.S.A.

Inhalt.

Vierte Folge. Band 75.

Siebzehntes Heft.

Seite

1. R. Gans. Die Farbe des Meeres 1
2. G. Borelius und C. H. Johansson. Ausdehnungsmessungen bei tiefen Temperaturen mit Doppelspiegeldilatometer . . . 23
3. P. Wallerath. Beitrag zur Erweiterung und Verbesserung des Systems sekundärer Wellenlängennormalen 37
4. Hermann Krefft. Über den Dopplereffekt an Kanalstrahlen von Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff 75
5. Mieczyslaw Jeżewski. Zur Veröffentlichung des Hrn. W. Kast: „Anisotropie der flüssigen Kristalle bezüglich ihrer Dielektrizitätskonstanten und ihrer elektrischen Leitfähigkeit“ 108

Ausgegeben im August 1924.

Achtzehntes Heft.

1. Rudolf Tomaschek. Über die Phosphoreszenzeigenschaften der seltenen Erden in Erdalkaliphosphoren. I 109
2. Sven Holgersson und Ernst Sedström. Experimentelle Untersuchungen über die Gitterstruktur einiger Metallegierungen 143
3. L. A. Sommer. Über das Funkenspektrum des Cäsiums . . 163
4. M. v. Laue und Nikhilranjan Sen. Über die Berechnung des Potentialabfalles in den von glühenden Metallen ausgesandten Ionen und Elektronengasen 182
5. B. Walter. Beugungsfransen an Spaltaufnahmen mit Röntgenstrahlen (2. Mitteilung). Hierzu Tafel I. 189
6. M. La Rosa. Das ballistische Prinzip in der Fortpflanzung des Lichtes und einige neuere Untersuchungen von Hrn. Rudolph Tomaschek 195
7. Hanns Jung. Über elektrodenlose Ringentladung 201
8. G. Tammann. Über die Atomverteilung in Mischkristallreihen 212

Ausgegeben im August 1924.

Neunzehntes Heft.

	Seite
1. A. Becker: Über die durch α -Strahlen erregte Elektronen-emission	217
2. L. Holborn: Über die Kolbenbewegung der Druckwage . . .	276
3. A. Wigand und T. Schlomka: Die Messung elektrischer Spannungen vom Motorluftfahrzeug aus	279
4. E. Rupp: Über Ausleuchtung der Phosphore durch magnetische und elektrische Felder	326

Ausgegeben im September 1924.

Zwanzigstes Heft.

1. Gerhard C. Schmidt: Über Atomstrahlen	337
2. E. Rupp: Über Phosphoreszenzerregung durch Hochfrequenzstrahlen	369
3. George Jaffé: Über den Einfluß der Diffusion auf nahezu gesättigte Ströme	391
4. Franz Zeilinger: Gastheoretische Berechnung der Brownschen Bewegung	408
5. W. Arkadiew: Reflexion elektromagnetischer Wellen an Hertzischen Gittern	426
6. A. Becker: Über die Erzeugung und Untersuchung mittelschneller Kathodenstrahlen	485
7. Erich Kretschmann: Berichtigung zu der Abhandlung: „Grundlagen einer Theorie der Supraleitfähigkeit“	448

Ausgegeben im Oktober 1924.

Einundzwanzigstes Heft.

1. Carl Ramsauer: Über den unmittelbaren Nachweis der elektrischen Erldladung	449
2. A. Glaser: Über eine neue Erscheinung am Diamagnetismus der Gase	459
3. Karl Lang: Messung von Röntgennormalen. (Hierzu Tafel II)	489
4. Hermann Krefft: Der Dopplereffekt an Kanalstrahlen des Wasserstoffs. Nachtrag	513
5. Arthur v. Hippel: Die Theorie des Thermomikrophons . . .	521
6. Ernst Sedström: Zur Kenntnis der Gold-Kupfer-Legierungen	549
7. Richard Becker: Über die strenge Gültigkeit des Gleichverteilungssatzes bei Oszillatoren und Rotatoren. (Bemerkung zu einer Arbeit von Georg Jaffé)	556

Ausgegeben im Oktober 1924.

Zweihundzwanzigstes Heft.

Seite

1. Rudolf Tomaschek: Über die Phosphoreszenzeigenschaften der seltenen Erden in Erdalkaliphosphoren. II. 561
2. Paul Fröhlich: Weitere Beobachtungen über die Gültigkeitsgrenze des geometrischen Gesetzes der Lichtbrechung 598
3. H. J. Spanner: Über die thermische Emission elektrisch geladener Teilchen 609
4. Friedrich Kottler: Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen. (Erwiderung auf die Bemerkungen von E. Maey und A. Rubinowicz) 634
5. Aloys Müller: Über die Form des blauen Himmels 653
6. W. Busse: Über Schallgeschwindigkeit und Verhältnis der spezifischen Wärmen von organischen Flüssigkeiten 657
7. Agate Carst: Über das kontinuierliche Wasserstoffspektrum 665

Ausgegeben im November 1924.

Dreihundzwanzigstes Heft.

1. Max Planck. Zur Quantenstatistik des Bohrschen Atommodells 673
2. G. Bakker. Zur Thermodynamik der Kapillarschicht 685
3. A. March. Kontinuierliches Röntgenspektrum und Plancksches Strahlungsgesetz 711
4. K. F. Niessen. Ableitung des Planckschen Strahlungsgesetzes für Atome mit zwei Freiheitsgraden 743

Ausgegeben im Dezember 1924.

Vierhundertzwanzigstes Heft.

Bildnis von L. W. Gilbert.

1. A. Becker: Über die Elektronenemission der Metalle. I . . 781
2. E. H. L. Meyer: Dielektrizitätskonstante und chemische Konstitution bei organischen Flüssigkeiten 801
3. G. H. Livens: Die Ganssche Theorie des Dia-, Para- und Metamagnetismus 819
4. Was. Shoulejkin: Die Farbe des Meeres 825
5. P. O. Pedersen: Über den elektrischen Funken. II. Teil: Experimentelle Untersuchungen über Funkenverzögerung und Funkenbildung. (Hierzu Tafel III bis IX) 827
6. F. v. Rautenfeld: Berichtigung und Nachtrag zu meiner Abhandlung „Zur Elektrizitätsleitung in Kristallen“ 848
7. Gesetz über die Temperaturakale und die Wärmeeinheit. Vom 7. August 1924 851

Ausgegeben im Dezember 1924.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I.	B. Walter.
„ II.	Karl Lang.
„ III bis IX.	P. O. Pedersen.

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE
BAND 75 HEFT 1
DER GANZEN REIHE 380. BANDES 1. HEFT

KURATORIUM:
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK



L E I P Z I G

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1924 erscheinen Bd. 73, 74 u. 75 à 8 Hefte.

Preis von Band 75 für Deutschland Goldmark 20.—; England £ 1—;

Holland fl. 11.50; Schweiz Fr. 25.—, U.S.A. \$ 4.50.

Ausgegeben im August 1924.

Inhalt.

	Seite
1. R. Gans. Die Farbe des Meeres	1
2. G. Borelius und C. H. Johansson. Ausdehnungsmessungen bei tiefen Temperaturen mit Doppelspiegeldilatometer	23
3. P. Wallerath. Beitrag zur Erweiterung und Verbesserung des Systems sekundärer Wellenlängennormalen	37
4. Hermann Krefft. Über den Dopplereffekt an Kanalstrahlen von Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff	75
5. Mieczyslaw Jeżewski. Zur Veröffentlichung des Hrn. W. Kast: „Anisotropie der flüssigen Kristalle bezüglich ihrer Dielektrizitätskonstanten und ihrer elektrischen Leitfähigkeit“	108

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 91.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 75.

1. *Die Farbe des Meeres;* *von R. Gans.*

Der Meinung Lord Rayleighs¹⁾, daß die dunkelblaue Farbe der tiefen See sich einfach durch Reflektion des blauen Himmels erklärt, stellte Raman²⁾ die fraglos richtige Behauptung gegenüber, daß die Erscheinung durch molekulare Zerstreuung des Sonnenlichts (Tyndalleffekt) an den Wasserteilchen hervorgerufen wird, wobei aber die wahre Absorption des Wassers wesentlich mitspielt. Diese Gedanken hat Ramanathan³⁾ auf Anregung Ramans weiter verfolgt.

Wenn wir das Problem noch einmal in Angriff nehmen, so geschieht es, um die Frage etwas eingehender zu behandeln, als es die beiden indischen Physiker getan haben. Diese haben sich nämlich auf normale Incidenz der Strahlen (Sonne im Zenit) sowie Beobachtung in normaler Richtung zur Wasseroberfläche beschränkt und haben, was mehr ins Gewicht fällt, nur die Lichtzerstreuung erster Ordnung berücksichtigt.

Wir wollen die Aufgabe allgemeiner anfassen. Die Sonnenstrahlen fallen unter einem beliebigen Winkel auf die Wasseroberfläche, werden dort zum Teil reflektiert und dringen zum Teil ins Wasser ein. Hier werden sie molekular zerstreut und zwar mehrfach, sowie, je nach dem Spektralbereich, mehr oder weniger absorbiert, d. h. in Wärme verwandelt. Der Rest kommt als diffuses Licht an die Oberfläche zurück, erleidet dort zum Teil eine innere Reflektion, und zwar je nach der Neigung der Strahlen gegen die Vertikale partielle oder totale Reflektion, zum Teil tritt er in die Luft aus.

Ist die Intensität des einfallenden Lichts als Funktion der Wellenlänge gegeben, so ist für jeden Austrittswinkel die

1) Lord Rayleigh, *Scientific Papers* 5. S. 540 (mir unzugänglich).

2) C. V. Raman, *Proc. Roy. Soc. (A)* 101. S. 64. 1922; vgl. auch „*Molecular Diffraction of Light*“, Calcutta 1922. S. 64 ff.

3) K. R. Ramanathan, *Phil. Mag.* 46. 1923. S. 453.

Intensität des diffusen Lichts zu berechnen, und da dieses kein natürliches Licht ist, so handelt es sich sowohl um die Intensitäten der in der Austrittsebene wie auch der senkrecht zu ihr polarisierten Strahlung.

§ 1. Die Zerstreuung erster Ordnung.

Es wird nützlich sein, zuerst nur die Zerstreuung erster Ordnung zu betrachten, d. h. den Tyndalleffekt, der durch die einfallende Strahlung erregt wird, aber die Abbeugung zu vernachlässigen, welche das einmal diffus gemachte Licht auf seinem Wege im Innern des Meeres erfährt.

Die Sonne habe die Zenitdistanz α . Die Einfallsebene machen wir zur xz -Ebene, und zwar sei die positive z -Achse, deren Ursprung in der Wasseroberfläche liegen möge, vertikal nach unten gerichtet.

Den einfallenden Strahl der Intensität J_0 zerlegen wir in zwei Bestandteile der Intensitäten $J_0/2$, die parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisiert sind, und behandeln zunächst den Fall (p) des parallel der Einfallsebene polarisierten Bestandteils des Sonnenlichts.

Die Primärwelle hat im Innern des Wassers den elektrischen Vektor:

$$(1) \quad \mathfrak{E}_y^0 = D e^{-\frac{h+h'}{2} \frac{z}{\cos \beta}} e^{i\nu \left(t - \frac{V_s}{c} (x \sin \beta + z \cos \beta) \right)},$$

wo

$$(2) \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}.$$

$n = \sqrt{s}$ ist der Brechungsexponent des Wassers, h der Koeffizient der durch Lichtzerstreuung hervorgerufenen scheinbaren Absorption, h' der der Verwandlung in Wärme entsprechende Absorptionskoeffizient.

Diese einfallende Welle erzeugt zerstreutes Licht, das sich — etwa nach Lorentz¹⁾ — aus dem Hertzschen Vektor:

$$(3) \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta \mathfrak{e}'}{r'} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r\sqrt{s'}}{c} \right) d\tau,$$

mittels der Gleichungen:

1) H. A. Lorentz, Les théories statistiques en thermodynamique, Leipzig und Berlin 1916. S. 83.

$$(4) \quad \mathfrak{E} = \text{grad div } \mathfrak{B} - \frac{s'}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2}; \quad \mathfrak{H} = \frac{s'}{c} \text{rot } \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

berechnet. Der einzige Unterschied dem Lorentzschen Ansatz gegenüber, den wir gemacht haben und machen müssen, ist der, daß wir die optische Dielektrizitätskonstante nicht reell, sondern, der scheinbaren und wahren Absorption entsprechend, in der komplexen Form:

$$(5) \quad s' = \varepsilon \left(1 - i \frac{h + h'}{\nu \sqrt{s}} c \right)$$

eingeführen. Dabei dürfen wir aber $\frac{h + h'}{\nu \sqrt{s}} c$, d. h. die auf der Strecke $\lambda/2\pi$ erfolgende relative Intensitätsabnahme als unendlich klein ansehen.

Da die zufälligen, durch Fluktuationen hervorgerufenen Schwankungen $\Delta\varepsilon$ der Dielektrizitätskonstante äußerst klein sind, so werden wir in vielen Fällen keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir in (3) anstatt des wahren Feldes \mathfrak{E} das ursprüngliche Feld \mathfrak{E}_0 der ungestörten Welle einführen. Das haben Einstein und Lorentz¹⁾ bei der Behandlung des Tyndallphänomens getan, und das durften sie bei den in Frage stehenden Problemen auch unbedenklich tun. Wir aber merken uns, daß diese Vereinfachung nur gestattet ist, wenn die Intensität der Tyndallstrahlung unendlich klein, d. h. $(\Delta\varepsilon)^2$ proportional ausfällt.

Das Ersetzen von \mathfrak{E} durch \mathfrak{E}_0 in (3) bedeutet, physikalisch gesprochen, die Beschränkung auf die Zerstreuung erster Ordnung.

Für ein Volumelement $d\tau$ am Orte ξ, η, ζ ergibt sich aus (1) und (3)

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B}_y = Z &= \frac{\Delta s' \cdot d\tau}{4\pi s' r} D e^{-\frac{h+h'}{2}} \left(\frac{\zeta}{\cos\beta} + r \right) \cos\nu \left(t - \frac{r\sqrt{s}}{c} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi \sin\beta + \zeta \cos\beta}{c} \sqrt{\varepsilon} \right), \end{aligned} \right.$$

wo

$$(7) \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **33**. 1910. S. 1286; H. A. Lorentz, a. a. O. S. 43 und 84.

Führen wir noch Kugelkoordinaten

(8) $\frac{x-\xi}{r} = \sin \vartheta \cos \varphi; \quad \frac{y-\eta}{r} \sin \vartheta \sin \varphi; \quad \frac{z-\zeta}{r} = \cos \vartheta$
 ein, so folgt aus (4) und (6) für Werte von r , die groß gegenüber λ sind,

$$(9) \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -Z\epsilon' \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi, & \mathfrak{H}_x = -Z\epsilon' \sqrt{\epsilon'} \frac{v^2}{c^2} \cos \vartheta, \\ \mathfrak{E}_y = -Z\epsilon' \frac{v^2}{c^2} (\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi - 1), & \mathfrak{H}_y = 0, \\ \mathfrak{E}_z = -Z\epsilon' \frac{v^2}{c^2} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi, & \mathfrak{H}_z = Z\epsilon' \sqrt{\epsilon'} \frac{v^2}{c^2} \sin \vartheta \cos \varphi, \end{cases}$$

Wegen des verschiedenen Verhaltens beim Austritt in Luft müssen wir die Bestandteile der Strahlung einzeln kennen, welche parallel (p) und senkrecht (s) der „Einfallebene“ (Ebene z, r) polarisiert sind. Deshalb berechnen wir aus (9) \mathfrak{E}_φ und \mathfrak{E}_φ' mittels der Formeln:

$$(10) \begin{cases} \mathfrak{E}_\varphi = \mathfrak{E}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \mathfrak{E}_y \cos \vartheta \sin \varphi - \mathfrak{E}_z \sin \vartheta, \\ \mathfrak{E}_\varphi' = -\mathfrak{E}_x \sin \varphi + \mathfrak{E}_y \cos \varphi, \end{cases}$$

und ebenso für \mathfrak{H} . Es ergibt sich:

$$(11) \begin{cases} \mathfrak{E}_\varphi = Z\epsilon' \frac{v^2}{c^2} \cos \vartheta \sin \varphi, & \mathfrak{H}_\varphi = -Z\epsilon' \sqrt{\epsilon'} \frac{v^2}{c^2} \cos \varphi, \\ \mathfrak{E}_\varphi' = Z\epsilon' \frac{v^2}{c^2} \cos \varphi, & \mathfrak{H}_\varphi' = +Z\epsilon' \sqrt{\epsilon'} \frac{v^2}{c^2} \cos \vartheta \sin \varphi, \end{cases}$$

so daß der absolute Wert des Poyntingschen Strahlungsvektors \mathfrak{S} im Wasser sich folgendermaßen ausdrückt¹⁾

$$(12) \begin{cases} S_s' = \frac{c\sqrt{\epsilon}}{4\pi} Z^2 \epsilon^2 \frac{v^4}{c^4} \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi, \\ S_p' = \frac{c\sqrt{\epsilon}}{4\pi} Z^2 \epsilon^2 \frac{v^4}{c^4} \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

Setzen wir in diese Formeln den Wert Z aus (6) ein, nehmen den Mittelwert über die Zeit, berücksichtigen, daß

$$(13) \quad \frac{D^2 \sqrt{\epsilon}}{8\pi} = \frac{J_0}{2} d_p,$$

wo²⁾

$$(14) \quad d_p = \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

1) Es ist leicht einzusehen, wo man in den Formeln ϵ' durch ϵ ersetzen darf.

2) Vgl. z. B. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900, S. 441.

der ins Wasser eintretende Teil der von uns betrachteten (Fall p) Sonnenstrahlung ist, und daß

$$(15) \quad h = \frac{8\pi^2}{3\lambda_0^4} (\Delta \varepsilon)^2 \cdot d\tau$$

ist¹⁾, so erhalten wir:

$$(16) \quad \begin{cases} S'_s = \frac{3h}{16\pi} J_0 d_p e^{-(h+h')\left(\frac{\zeta}{\cos\beta} + r\right)} \frac{d\tau}{r^2} \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi, \\ S'_p = \frac{3h}{16\pi} J_0 d_p e^{-(h+h')\left(\frac{\zeta}{\cos\beta} + r\right)} \frac{d\tau}{r^2} \cdot \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

Um die Strahlung zu erhalten, die durch den Punkt P (x, y, z) innerhalb des Kegels $d\omega$ hindurchgeht, setzen wir $d\tau = r^2 d\omega dr$ und integrieren über r . So wird, da $z - \zeta = r \cos \vartheta$ ist,

$$S'_s = \frac{3h}{16\pi} J_0 d_p e^{-(h+h')\frac{z}{\cos\beta}} \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi d\omega \int e^{-(h+h')r\left(1 - \frac{\cos\vartheta}{\cos\beta}\right)} dr.$$

Ist $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ (die Strahlung geht auf die Oberfläche zu), so sind die Grenzen 0 und ∞ . Ist dagegen $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ (die Strahlung kommt aus der Richtung der Oberfläche), so sind die Grenzen 0 und $z/\cos \vartheta$.

Auf diese Weise erhält man

$$(17) \quad S'_s = \frac{3h}{16\pi} \frac{J_0 d_p \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi d\omega}{(h+h')\left(1 - \frac{\cos\vartheta}{\cos\beta}\right)} e^{-(h+h')\frac{z}{\cos\beta}} \quad \text{für } \vartheta > \frac{\pi}{2}.$$

$$(17') \quad \begin{cases} S'_s = \frac{3h}{16\pi} \frac{J_0 d_p \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi d\omega}{(h+h')\left(1 - \frac{\cos\vartheta}{\cos\beta}\right)} \left[e^{-(h+h')\frac{z}{\cos\beta}} - e^{-(h+h')\frac{z}{\cos\vartheta}} \right] \\ \text{für } \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Die beiden Ausdrücke gehen für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ stetig ineinander über, und (17') bleibt für $\vartheta = \beta$ endlich.

Genau so gestaltet sich nach (16) der Ausdruck für S'_p , nur ist $\cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi$ durch $\cos^2 \varphi$ zu ersetzen.

1) Vgl. z. B. R. Gans, Zeitschr. f. Phys. 17. S. 371. 1923.

Die Strahlung durch ein horizontales Flächenelement $d\sigma$ ergibt sich durch Multiplikation mit $\cos \vartheta \cdot d\sigma$, somit folgt für die spezifische Intensität der diffusen Strahlung im Wasser, die auf die Oberfläche zuläuft ($\vartheta > \frac{\pi}{2}$),

$$(18) \quad \begin{cases} K'_s = \frac{3}{16\pi} \frac{h}{h+h'} J_0 d_p \frac{\cos \beta \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{\cos \beta - \cos \vartheta} e^{-(h+h') \frac{z}{\cos \beta}}, \\ K'_p = \frac{3}{16\pi} \frac{h}{h+h'} J_0 d_p \frac{\cos \beta \cos^2 \varphi}{\cos \beta - \cos \vartheta} e^{-(h+h') \frac{z}{\cos \beta}}. \end{cases}$$

Für $z = 0$ ergibt sich

$$(19) \quad \begin{cases} K'_s \cos \vartheta d\omega = \frac{3}{16\pi} \frac{h}{h+h'} J_0 d_p \frac{\cos \beta \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{\cos \beta - \cos \vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \\ K'_p \cos \vartheta d\omega = \frac{3}{16\pi} \frac{h}{h+h'} J_0 d_p \frac{\cos \beta \cos^2 \varphi}{\cos \beta - \cos \vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{cases}$$

Von dieser Strahlung tritt der Bruchteil $d_s(\Theta)$ bzw. $d_p(\Theta)$ in die Luft aus und erfüllt dort das Kegelement

$$d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi.$$

Hier ist (vgl. z. B. E. Cohn, a. a. O.)

$$(20) \quad d_s(\Theta) = \frac{\sin^2 \Theta \sin^2 \vartheta}{\sin^2(\Theta + \vartheta) \cos^2(\Theta - \vartheta)}; \quad d_p(\Theta) = \frac{\sin 2\Theta \sin 2\vartheta}{\sin^2(\Theta + \vartheta)}.$$

Da ferner

$$(21) \quad \sin \Theta = n \sin \vartheta; \quad \Phi = \varphi; \quad \cos \Theta d\Theta = n \cos \vartheta d\vartheta$$

ist, so ergibt sich für die spezifische Intensität K in Luft:

$$(22) \quad \begin{cases} K_s = \frac{3}{16\pi} \frac{h}{h+h'} \frac{J_0 d_p(\alpha) d_s(\Theta)}{n^2} \frac{\cos \beta \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{\cos \beta + \cos \vartheta}, \\ K_p = \frac{3}{16\pi} \frac{h}{h+h'} \frac{J_0 d_p(\alpha) d_p(\Theta)}{n^2} \frac{\cos \beta \cos^2 \varphi}{\cos \beta + \cos \vartheta}. \end{cases} \quad (\text{Fall } p)$$

In den Formeln (20) bis (22) haben wir ϑ durch $\pi - \vartheta$ ersetzt; ϑ ist also jetzt der spitze Winkel, den die auf die Oberfläche zueilende Strahlung im Wasser an dessen Oberfläche mit der Vertikalen bildet.

Der Fall s erledigt sich ganz analog. Es ist $\beta_y = 0$; β_s und β_p haben denselben Wert wie Z früher in (6), nur ist D durch $D \cos \beta$ bzw. $-D \sin \beta$ zu ersetzen.

Man erhält auf diese Weise für den Fall s :

$$(23) \quad \begin{cases} K_s = \frac{3}{16\pi} \frac{h}{h+h'} \frac{J_0 d_s(\alpha) d_s(\Theta)}{n^2} \frac{\cos \beta (\cos \beta \cos \vartheta \cos \varphi + \sin \beta \sin \vartheta)^2}{\cos \beta + \cos \vartheta}, \\ K_p = \frac{3}{16\pi} \frac{h}{h+h'} \frac{J_0 d_s(\alpha) d_p(\Theta)}{n^2} \frac{\cos^2 \beta \sin^2 \varphi}{\cos \beta + \cos \vartheta}. \end{cases} \quad (\text{Fall } s)$$

Die entsprechenden Formeln (22) und (23) müssen addiert werden, um das gesamte diffuse Licht der betr. Polarisationsrichtung zu bekommen.

Steht die Sonne im Zenit, so ist

$$\alpha = 0; \quad \beta = 0; \quad d_s(0) = d_p(0) = \frac{4n}{(n+1)^2},$$

also

$$(24) \quad \begin{cases} K_s \cos \Theta d\Omega = \frac{3}{4\pi} \frac{h}{h+h'} \frac{J_0}{n(n+1)^2} \frac{d_s(\Theta) \cos^2 \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta d\Phi, \\ K_p \cos \Theta d\Omega = \frac{3}{4\pi} \frac{h}{h+h'} \frac{J_0}{n(n+1)^2} \frac{d_p(\Theta)}{1 + \cos \vartheta} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta d\Phi. \end{cases}$$

Die ganze Ausstrahlung der Flächeneinheit der Oberfläche beträgt also

$$(25) \quad R = \frac{3}{2} \frac{h}{h+h'} \frac{J_0}{n(n-1)^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d_s(\Theta) \cos^2 \vartheta + d_p(\Theta)}{1 + \cos \vartheta} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta.$$

In den Gl. (22) bis (25) figuriert bei gegebener Spektralverteilung der einfallenden Strahlung die Wellenlänge nur insofern merklich, als $h/(h+h')$ von ihr abhängt, denn die anderen Terme variieren nur wegen der Dispersion des Wassers mit λ , doch ist diese wegen ihrer Geringfügigkeit für unser Problem ganz irrelevant.

Wir können also sagen, daß die Lichtzerstreuung erster Ordnung völlig durch die Größe $h/(h+h')$ bestimmt ist, der sie in diesem Grade der Näherung proportional ist.

Tab. 1 gibt die Größe

$$K = \frac{d_s(\Theta) \cos^2 \vartheta + d_p(\Theta)}{1 + \cos \vartheta},$$

der die Helligkeit in ihrer Abhängigkeit vom Winkel Θ proportional ist; Tab. 2 enthält die Werte von h gemäß der aus der Fluktuationstheorie abgeleiteten Einsteinschen Formel (μ Kompressibilität)

$$(26) \quad h = \frac{8\pi^2}{3\lambda_0^4} k T \mu \frac{(n^2 - 1)^2 (n^2 + 2)^2}{9},$$

sowie die photometrisch bestimmten Extinktionen $h + h'$ nach v. Aufsess, Martin und Ewan.¹⁾

Das Integral in (25) haben wir mit einem mittleren Werte $n = 1,333$ für reines Wasser numerisch ausgewertet. Es hat den Wert 0,4315, so daß die Gesamtstrahlung

$$(27) \quad R = 0,08917 \frac{h}{h + h'} J_0$$

wird.

Tabelle 1.

Θ	K	Θ	K
0°	0,9795	50°	0,8810
5	0,9779	55	0,8584
10	0,9759	60	0,8303
15	0,9696	65	0,7918
20	0,9629	70	0,7372
25	0,9532	75	0,6566
30	0,9434	80	0,5307
35	0,9305	85	0,3304
40	0,9168	90	0,0000
45	0,9005		

Tabelle 2.

λ	$(h + h') \cdot 10^3$ in 1/cm	$h \cdot 10^5$ in 1/cm	$\frac{h}{h + h'} \cdot 10^3$	Auton von $h + h'$
658	3,28	0,783	2,39	Aufsess
612	2,33	1,054	4,52	"
578	0,64	1,337	20,9	"
546,1	0,34	1,693	49,8	Martin
435,8	0,12	4,391	366	"
430	0,23	4,658	202	Ewan
415	0,35	5,466	156	"

Zweifellos stellen unsere Formeln eine gute Näherung in den Spektralgebieten dar, in denen $h/(h + h')$ klein ist. Da aber diese für die Farbe des Wassers charakteristische Größe im Blauen Werte annimmt, die $1/3$ überschreiten, so können

1) O. Frh. v. u. z. Aufseß, Ann. d. Phys. (4) 13. S. 678. 1904; W. H. Martin, Journ. Phys. Chem. 26. S. 471. 1922 (zitiert nach Ramanathan, a. a. O.); Th. Ewan, Proc. Roy. Soc. 57. S. 1117. 1894 (zitiert nach Kayzers Handb. der Spektroskopie 3. S. 392).

wir, ohne die Näherung weiter zu treiben, zwar aus der Kurve, die $h/(h + h')$ als Funktion von λ darstellt, ablesen, daß ein aus reinem Wasser bestehender tiefer Ozean blau sein muß, aber die quantitativen Ergebnisse im kurzwelligen Teil des Spektrums würden doch unsicher bleiben.

Fragen wir uns einmal nach dem Aussehen eines Ozeans, wenn das Wasser keine wahre Absorption ($h' = 0$) hätte, sondern nur Extinktion infolge von Lichtzerstreuung aufwiese. Dann wäre $\frac{h}{h + h'} = 1$, und infolgedessen käme in unseren Formeln die Wellenlänge überhaupt nicht mehr vor, abgesehen von der belanglosen Dispersion. Das zurückgestrahlte Licht wäre also weiß. Wir können demnach sagen: *Daß der Ozean überhaupt diffuses Licht aussendet, liegt an der molekularen Lichtzerstreuung; daß dieses Licht blau ist, erklärt sich durch die wahre Absorption im Roten, Gelben und Grünen.*

Es scheint auf den ersten Blick überraschend, daß der Himmel blau ist, und daß absorptionsloses Wasser, dessen Farbe sich nach demselben Prinzip erklärt (Tyndalleffekt), weiß aussehen müßte, doch verstehen wir den Unterschied sofort, wenn wir berücksichtigen, daß wir uns in der Atmosphäre befinden und die Lichtzerstreuung von der Seite beobachten, während wir die Farbe des Wassers von oben beurteilen.¹⁾ Da die Lichtzerstreuung proportional h ist und — bei absorptionslosem Wasser — die Extinktion ebenfalls, so würde das rote Licht vornehmlich aus größeren Tiefen kommen, das blaue dagegen aus den Oberflächenschichten. Unterwasserversuche würden demgemäß je nach der Tiefe, in der man sie anstellt, verschiedene Farbeindrücke ergeben. Künstlich kann man sich die Verhältnisse des Wassers ohne wahre Absorption schaffen, indem man es durch sehr kleine kolloidale Bestandteile trübt, weil dann h so groß wird, daß h' daneben vernachlässigt werden kann.

Man könnte den Einwand machen, daß unsere Formeln, die nur für kleine $h/(h + h')$ gelten, keine Schlüsse zulassen, wenn diese Größe den Wert 1 annimmt. Jedoch läßt gerade

1) Es kommt hinzu, daß es zwar so tiefe Meere gibt, daß praktisch kein Licht auf den Grund kommt, die Atmosphäre läßt jedoch einen großen Teil hindurch.

in diesem Falle schon die Anwendung des Poyntingschen Satzes das Resultat ableiten. Betrachten wir einen geraden Zylinder von 1 qcm Querschnitt, dessen Grundflächen in der Wasseroberfläche bzw. auf dem Meeresgrunde liegen mögen. Durch die Bodenfläche geht überhaupt keine Strahlung, durch die Seitenflächen tritt ebensoviel ein wie aus, also muß die oben eintretende ebene Welle dort wieder diffus völlig herauskommen. Da das für jede Wellenlänge gilt, so sähe die Flüssigkeit weiß aus. Die aus der Flächeneinheit herauskommende Gesamtstrahlung müßte also (mit Berücksichtigung des Reflexionsverlustes, den die einfallende Welle an der Oberfläche erleidet)

$$R = \frac{4n}{(n+1)^2} J_0 = 0,98 J_0$$

sein, während unsere Formel (27) für $h' = 0$ $R = 0,089 J_0$ ergibt. Wir sehen also, daß für größere Werte von $h/(h+h')$ die Beschränkung auf die Zerstreuung erster Ordnung auch nicht einen groben Näherungswert gibt. Wir gehen deshalb zur Entwicklung der allgemeinen Theorie über, beschränken uns in ihr aber aus Gründen der Einfachheit auf senkrecht einfallende Strahlung, obwohl der Behandlung des allgemeinen Falles durchaus keine Schwierigkeiten im Wege stehen.

§ 2. Strenge Formulierung des Problems.

Um die Aufgabe der Lichtzerstreuung in einer absorbierenden Flüssigkeit streng zu behandeln, wollen wir zunächst die Richtungsänderung der Strahlung im einzelnen verfolgen.

Ein Strahl der Intensität K' und des räumlichen Öffnungswinkels

$$d\omega' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$$

erleide an einem Volumelement $d\tau$ Lichtzerstreuung. Es fragt sich, wieviel von diesem zerstreuten Licht in den Öffnungswinkel

$$d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

gerät. Wir müssen die Strahlungen in $d\omega$, sowie in $d\omega'$ in die beiden Bestandteile zerlegen, die parallel der „Einfallsebene“ (p) bzw. senkrecht zu ihr (s) polarisiert sind. Unter Einfallsebene verstehen wir dabei die durch die Achse des Elementarkegels und die im Raume feste z -Achse bestimmte Ebene.

Wir führen Kugelkoordinaten ein, deren Ursprung in $d\tau$ liegt. Die Feldstärke in dem Elementarkegel $d\omega'$ habe die Komponenten \mathfrak{E}' , \mathfrak{E}_φ' . Dann ist

$$(28) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x' = \mathfrak{E}_\rho' \cos \vartheta' \cos \varphi' - \mathfrak{E}_\varphi' \sin \varphi' \\ \mathfrak{E}_y' = \mathfrak{E}_\rho' \cos \vartheta' \sin \varphi' + \mathfrak{E}_\varphi' \cos \varphi' \\ \mathfrak{E}_z' = -\mathfrak{E}_\rho' \sin \vartheta', \end{cases}$$

also lautet nach (3) der für die Zerstreuung an $d\tau$ maßgebliche Hertzsche Vektor \mathfrak{B}

$$(29) \quad \mathfrak{B}_x = \frac{\Delta s}{s} \frac{d\tau}{4\pi r} (\mathfrak{E}_\rho' \cos \vartheta' \cos \varphi' - \mathfrak{E}_\varphi' \sin \varphi') \text{ usw.}$$

Mittels (4) folgt daraus für die Feldstärke im Elementarkegel $d\omega$, und zwar in einer gegen die Wellenlänge großen Entfernung $d\tau$

$$(30) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\frac{v^2}{c^3} \varepsilon \left[\mathfrak{B}_x \left(\frac{x^2}{r^3} - 1 \right) + \mathfrak{B}_y \frac{xy}{r^3} + \mathfrak{B}_z \frac{xz}{r^3} \right] \\ \mathfrak{E}_y = -\frac{v^2}{c^3} \varepsilon \left[\mathfrak{B}_x \frac{yx}{r^3} + \mathfrak{B}_y \left(\frac{y^2}{r^3} - 1 \right) + \mathfrak{B}_z \frac{yz}{r^3} \right] \\ \mathfrak{E}_z = -\frac{v^2}{c^3} \varepsilon \left[\mathfrak{B}_x \frac{zx}{r^3} + \mathfrak{B}_y \frac{zy}{r^3} + \mathfrak{B}_z \left(\frac{z^2}{r^3} - 1 \right) \right], \end{cases}$$

somit

$$(31) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\rho = -\frac{v^2}{c^3} \varepsilon [\mathfrak{B}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \mathfrak{B}_y \cos \vartheta \sin \varphi - \mathfrak{B}_z \sin \vartheta] \\ \mathfrak{E}_\varphi = +\frac{v^2}{c^3} \varepsilon [\mathfrak{B}_x \sin \varphi - \mathfrak{B}_y \cos \varphi], \end{cases}$$

und wenn man \mathfrak{B} aus (29) einsetzt,

$$(32) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\rho = -\frac{v^2}{c^3} \frac{\Delta s \cdot d\tau}{4\pi r} [\mathfrak{E}_\rho' \cos \gamma + \mathfrak{E}_\varphi' \cos \vartheta \sin(\varphi - \varphi')] \\ \mathfrak{E}_\varphi = \frac{v^2}{c^3} \frac{\Delta s \cdot d\tau}{4\pi r} [\mathfrak{E}_\rho' \cos \vartheta' \sin(\varphi - \varphi') - \mathfrak{E}_\varphi' \cos(\varphi - \varphi')], \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(33) \quad \cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta'.$$

Nun ist

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{c\sqrt{s}}{4\pi} \overline{\mathfrak{E}_\rho'^2} d\omega' = K_s' d\omega'; & \frac{c\sqrt{s}}{4\pi} \overline{\mathfrak{E}_\rho^2} d\omega = K_s d\omega \\ \frac{c\sqrt{s}}{4\pi} \overline{\mathfrak{E}_\varphi'^2} d\omega' = K_p' d\omega'; & \frac{c\sqrt{s}}{4\pi} \overline{\mathfrak{E}_\varphi^2} d\omega = K_p d\omega. \end{cases}$$

Somit ist der Strahlungszuwachs, den der Elementarkegel $d\omega$ infolge von Zerstreuung an $d\tau$ der ursprünglich in $d\omega'$ befindlichen Strahlung erfährt,

$$(35) \left\{ \begin{aligned} d_1 \cdot K_s d\omega &= \frac{\pi^2}{\lambda_0^4} [(\Delta\epsilon)^2 d\tau] \\ &\quad \cdot d\tau \cdot d\omega [K_s' \cos^2 \gamma + K_p' \cos^2 \vartheta \sin^2(\varphi - \varphi')] d\omega' \\ d_1 \cdot K_p d\omega &= \frac{\pi^2}{\lambda_0^4} [(\Delta\epsilon)^2 d\tau] \\ &\quad \cdot d\tau d\omega [K_s' \cos^2 \vartheta' \sin^2(\varphi - \varphi') + K_p' \cos^2(\varphi - \varphi')] d\omega', \end{aligned} \right.$$

und der gesamte Zuwachs in $d\omega$ infolge der Zerstreuung der Strahlen aller möglichen Richtungen

$$(36) \left\{ \begin{aligned} A_1 K_s d\omega &= \frac{\pi^2}{\lambda_0^4} [(\Delta\epsilon)^2 d\tau] \\ &\quad \cdot d\tau \cdot d\omega \int [K_s' \cos^2 \gamma + K_p' \cos^2 \vartheta \sin^2(\varphi - \varphi')] d\omega' \\ A_1 K_p d\omega &= \frac{\pi^2}{\lambda_0^4} [(\Delta\epsilon)^2 d\tau] \\ &\quad \cdot d\tau \cdot d\omega \int [K_s' \cos^2 \vartheta' \sin^2(\varphi - \varphi') + K_p' \cos^2(\varphi - \varphi')] d\omega'. \end{aligned} \right.$$

Die phänomenologische Bedeutung von $(\Delta\epsilon)^2 d\tau$ ergibt sich, wenn wir in (35) über $d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ integrieren, denn damit erhalten wir den Gesamtverlust, welchen $K_s' d\omega'$ und $K_p' d\omega'$ an $d\tau$ erleiden. Es folgt

$$(37) \left\{ \begin{aligned} d_1 \int K_s d\omega + d_1 \int K_p d\omega &= \frac{8\pi^3}{3\lambda_0^4} [(\Delta\epsilon)^2 d\tau] d\tau (K_s' + K_p') d\omega' \\ &= h d\tau (K_s' + K_p') d\omega'. \end{aligned} \right.$$

Das ist aber die an anderem Orte abgeleitete Beziehung [vgl. Gl. (15)]

$$(38) \quad h = \frac{8\pi^3}{3\lambda_0^4} [(\Delta\epsilon)^2 d\tau].$$

Damit nehmen die Gl. (36) die einfachere Form an

$$(39) \left\{ \begin{aligned} A_1 \cdot K_s d\omega &= \frac{3h}{8\pi} d\tau \cdot d\omega \\ &\quad \int [K_s' \cos^2 \gamma + K_p' \cos^2 \vartheta \sin^2(\varphi - \varphi')] d\omega' \\ A_1 \cdot K_p d\omega &= \frac{3h}{8\pi} d\tau \cdot d\omega \\ &\quad \int [K_s' \cos^2 \vartheta' \sin^2(\varphi - \varphi') + K_p' \cos^2(\varphi - \varphi')] d\omega'. \end{aligned} \right.$$

Außer diesem Zuwachs erhält der Elementarkegel $d\omega$ aber noch Strahlung durch Zerstreuung der einfallenden Welle an $d\tau$. Diesen Betrag erhalten wir unmittelbar aus (35), wenn wir dort $K_s d\omega'$, sowie $K_p d\omega'$ durch

$$\frac{J}{2} e^{-(h+h')z}$$

ersetzen und $\vartheta' = 0$ setzen. Hier bedeutet J die Intensität¹⁾ des senkrecht einfallenden Strahls im Wasser, aber an der Oberfläche, somit $J e^{-(h+h')z}$ dieselbe in der Tiefe z , wenn h und h' die Koeffizienten der scheinbaren und wahren Absorption sind. Es ergibt sich also als zweiter Zuwachs in $d\omega$

$$(40) \quad \begin{cases} \Delta_2 \cdot K_s d\omega = \frac{3h}{8\pi} d\tau d\omega \frac{J}{2} e^{-(h+h')z} \cos^2 \vartheta \\ \Delta_2 \cdot K_p d\omega = \frac{3h}{8\pi} d\tau d\omega \frac{J}{2} e^{-(h+h')z} \end{cases}$$

(39) und (40) sind also auf das Gewinnkonto von $d\omega$ zu schreiben. Auf das Verlustkonto kommt diejenige Strahlung, welche $K d\omega$ beim Durchgang durch $d\tau$ infolge von Zerstreuung und Absorption verliert. Dieser Betrag ist

$$(41) \quad \begin{cases} \Delta_3 \cdot K_s d\omega = (h+h') K_s d\tau d\omega \\ \Delta_3 \cdot K_p d\omega = (h+h') K_p d\tau d\omega \end{cases}$$

Das Volumelement $d\tau$ war bisher beliebig. Wir wählen es jetzt als unendlich kleinen Zylinder der Grundfläche $d\sigma$ und der Höhe dl , und zwar habe dl die Richtung der Kegelachse $d\omega$. Da nun K Funktion des Orts ist, so ist der Zuwachs der Strahlung infolge des Durchlaufens von $d\tau$

$$\frac{\partial K}{\partial l} dl d\sigma d\omega = \frac{\partial K}{\partial l} d\tau d\omega,$$

und weil in dem von uns behandelten Falle K nur von der Koordinate $z = l \cos \vartheta$ abhängt, ist dieser Zuwachs

$$(42) \quad \begin{cases} \Delta K_s d\omega = \frac{\partial K_s}{\partial z} \cos \vartheta d\tau d\omega \\ \text{bzw.} \\ \Delta K_p d\omega = \frac{\partial K_p}{\partial z} \cos \vartheta d\tau d\omega \end{cases}$$

1) J ist nicht dasselbe wie das J_0 in § 1. Ersteres bedeutet die Intensität im Wasser, letzteres die in Luft. Wegen der Reflexion an der Oberfläche gilt die Beziehung $J = \frac{4n}{(n+1)^2} J_0$.

Die Kontinuitätsgleichung

$$\Delta K \cdot d\omega = \Delta_1 \cdot K d\omega + \Delta_2 \cdot K d\omega - \Delta_3 \cdot K d\omega$$

ergibt also nach (39), (40), (41) und (42)

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial K_s}{\partial x} \cos \vartheta + (h + h') K_s \\ & \quad = \frac{3h}{8\pi} \int d\omega' [K_s' \cos^2 \gamma + K_p' \cos^2 \vartheta \sin^2(\varphi - \varphi')] \\ & \quad + \frac{3h}{16\pi} J e^{-(h+h')z} \cos^2 \vartheta \\ & \frac{\partial K_p}{\partial x} \cos \vartheta + (h + h') K_p \\ & \quad = \frac{3h}{8\pi} \int d\omega' [K_s' \cos^2 \vartheta' \sin^2(\varphi - \varphi') + K_p' \cos^2(\varphi - \varphi')] \\ & \quad + \frac{3h}{16\pi} J e^{-(h+h')z} \end{aligned} \right.$$

Da K aus Symmetriegründen (wegen der senkrechten Inzidenz) von φ unabhängig ist, können wir nach φ' integrieren und erhalten, indem wir noch

$$(44) \quad K_s = U; \quad K_p = V; \quad (h + h')z = x; \quad \frac{3}{8} \frac{h}{h + h'} = \kappa$$

setzen,

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial x} \cos \vartheta + U = \kappa \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \\ & \quad \cdot [U' (\cos^2 \vartheta \cos^2 \vartheta' + 2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \vartheta') + V' \cos^2 \vartheta] \\ & \quad + \frac{\kappa J}{2\pi} e^{-x} \cos^2 \vartheta \\ & \frac{\partial V}{\partial x} \cos \vartheta + V = \kappa \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' [U' \cos^2 \vartheta' + V'] + \frac{\kappa J}{2\pi} e^{-x} \end{aligned} \right.$$

U' und V' bedeuten hier natürlich die Größen U bzw. V für das Argument ϑ' .

Wir sind damit auf zwei simultane inhomogene lineare Differential-Integralgleichungen geführt, die die Lichtzerstreuung beherrschen. Die Ableitung derselben hat manche Berührungspunkte mit der Methode, die Jaffé¹⁾ auf ein strahlungstheoretisches Problem angewandt hat.

Schließlich sind noch die Grenzbedingungen zu formulieren. Diese lauten

1) G. Jaffé, Ann. d. Phys. 68. S. 583. 1922.

(46) für $x = \infty$: $U = 0$; $V = 0$.

Ferner gelten an der Oberfläche für die diffuse Strahlung die Fresnelschen Reflexionsformeln, d. h.

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } x = 0 \text{ und } 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}: \\ U(\vartheta) = u(\vartheta) U(\pi - \vartheta) \\ V(\vartheta) = v(\vartheta) V(\pi - \vartheta). \end{array} \right.$$

Hier sind u und v als bekannte, zwischen 0 und $\pi/2$ definierte Funktionen von ϑ aufzufassen, und zwar ist (vgl. z. B. E. Cohn a. a. O.)

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(\vartheta) = \frac{\operatorname{tg}^2(\Theta - \vartheta)}{\operatorname{tg}^2(\Theta + \vartheta)} \text{ für } \sin \vartheta < \frac{1}{n} \\ v(\vartheta) = \frac{\sin^2(\Theta - \vartheta)}{\sin^2(\Theta + \vartheta)} \text{ (part. Refl.)} \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} u(\vartheta) = 1 \text{ für } \sin \vartheta > \frac{1}{n} \\ v(\vartheta) = 1 \text{ (Totalrefl.)} \end{array} \right.$$

und Θ drückt sich mittels $\sin \Theta = n \sin \vartheta$ durch ϑ aus.

Aus den Gleichungen (45) bis (48) lassen sich einige allgemeine Folgerungen ziehen.

1. Für einen bestimmten Wert von x , der noch von der Wellenlänge abhängen kann, und gegebene Spektralverteilung von J sind U und V Funktionen von ϑ und x , d. h. nach (44) Funktionen von ϑ und $(h + h')z$. Das bedeutet, daß das Strahlungsfeld in Richtung der z -Achse um so mehr ähnlich zusammengedrückt ist, je größer die Gesamtabsorption $h + h'$ ist. Das kommt für Unterwasserbeobachtungen in Frage.

2. Die Farbe des Wassers hängt von den Werten ab, die U und V für $x = 0$ haben, ist also bei gegebener Spektralverteilung der Beleuchtung J wesentlich durch $\kappa = \frac{3}{8} \frac{h}{h + h'}$ bestimmt, keineswegs aber κ proportional, wie es in § 1 bei Vernachlässigung der Zerstreuung höherer Ordnungen folgte.

3. Würde das Wasser nur Licht zerstreuen, aber nicht wirklich absorbieren ($h' = 0$), so hätte κ seinen Maximalwert $3/8$, wäre also für alle Wellenlängen dieselbe Zahl, und die Funktionen U und V würden für $x = 0$ von λ unabhängig sein, da auch die Grenzbedingungen es merklich sind. Die Farbe eines solchen gedachten (oder künstlich trübe gemachten) Meeres würde also für einen außerhalb des Wassers befindlichen Beobachter bei Beleuchtung mit weißem Licht weiß sein.

§ 3. Erste Integrationsmethode.

Wir denken uns U und V nach Potenzen von x entwickelt, setzen also an

$$(49) \quad \begin{cases} U = \frac{Jx}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} x^n U_n \\ V = \frac{Jx}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} x^n V_n \end{cases}$$

und setzen diese Reihen in (45) ein. Dadurch gewinnen wir ein Verfahren der sukzessiven Näherungen, durch das die simultanen Differential-Integralgleichungen sich in nicht simultane Differentialgleichungen für jeden Index n verwandeln. Physikalisch entsprechen die Glieder der Reihe den Zerstreuungen der verschiedenen Ordnungen, und die Reihen konvergieren offenbar um so besser, je kleiner x ist, d. h. je größer die wahre Absorption gegenüber der scheinbaren ist.

Wir erhalten auf diese Weise

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_0}{\partial x} \cos \vartheta + U_0 = e^{-x} \cos^2 \vartheta \\ \frac{\partial V_0}{\partial x} \cos \vartheta + V_0 = e^{-x}. \end{cases}$$

Die Integration liefert

$$(51) \quad \begin{cases} U_0 = \frac{\cos^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta} \left[e^{-x} + \Phi(\vartheta) e^{-\frac{x}{\cos \vartheta}} \right] \\ V_0 = \frac{1}{1 - \cos \vartheta} \left[e^{-x} + \Psi(\vartheta) e^{-\frac{x}{\cos \vartheta}} \right]. \end{cases}$$

Φ und Ψ sind willkürliche Funktionen, die aber wegen (46) für $\vartheta > \pi/2$ verschwinden müssen. Deshalb haben wir folgendermaßen zu unterscheiden

$$(52) \quad \begin{cases} U_0 = \frac{\cos^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta} \left[e^{-x} + \Phi(\vartheta) e^{-\frac{x}{\cos \vartheta}} \right] & \vartheta < \pi/2 \\ U_0 = \frac{\cos^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta} e^{-x} & \vartheta > \pi/2 \\ V_0 = \frac{1}{1 - \cos \vartheta} \left[e^{-x} + \Psi(\vartheta) e^{-\frac{x}{\cos \vartheta}} \right] & \vartheta < \pi/2 \\ V_0 = \frac{1}{1 - \cos \vartheta} e^{-x} & \vartheta > \pi/2 \end{cases}$$

Φ und Ψ bestimmen sich mittels (47), so daß wir schließlich erhalten

$$(53) \quad \begin{cases} U_0 = \frac{\cos^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta} \left[e^{-x} - \left(1 - u \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right) e^{-\frac{x}{\cos \vartheta}} \right] & \vartheta < \pi/2 \\ U_0 = \frac{\cos^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta} e^{-x} & \vartheta > \pi/2 \\ V_0 = \frac{1}{1 - \cos \vartheta} \left[e^{-x} - \left(1 - v \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right) e^{-\frac{x}{\cos \vartheta}} \right] & \vartheta < \pi/2 \\ V_0 = \frac{1}{1 - \cos \vartheta} e^{-x} & \vartheta > \pi/2 \end{cases}$$

Dies ist, nur in anderer Schreibweise, die in § 1 gefundene Lösung [Gleichungen (19) und (23)].

Wir gehen jetzt zur Zerstreuung zweiter Ordnung über. Die Gleichungen, denen U_1 und V_1 zu gehorchen haben, lauten nach (45) und (49)

$$(54) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} \cos \vartheta + U_1 = \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \cdot \\ \quad \cdot [U_0' (\cos^2 \vartheta \cos^2 \vartheta' + 2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \vartheta') + V_0' \cos^2 \vartheta], \\ \frac{\partial V_1}{\partial x} \cos \vartheta + V_1 = \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' [U_0' \cos^2 \vartheta' + V_0']. \end{cases}$$

Substituiert man in diesen die Werte U_0 und V_0 aus (53), so erhält man

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} \cos \vartheta + U_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \vartheta' d\vartheta'}{1 - \cos \vartheta'} \cdot (\cos^2 \vartheta \cos^2 \vartheta' + 2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \vartheta') \cos^2 \vartheta' \\ \quad \cdot \left[e^{-x} - \left(1 - u \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta'}{2} \right) e^{-\frac{x}{\cos \vartheta'}} \right] \\ \quad + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \vartheta' d\vartheta'}{1 - \cos \vartheta'} \cos^2 \vartheta \left[e^{-x} - \left(1 - v \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta'}{2} \right) e^{-\frac{x}{\cos \vartheta'}} \right] \\ \quad + e^{-x} \int_{\pi/2}^\pi \frac{\sin \vartheta' d\vartheta'}{1 - \cos \vartheta'} \\ \quad \cdot [\cos^2 \vartheta' (\cos^2 \vartheta \cos^2 \vartheta' + 2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \vartheta') + \cos^2 \vartheta], \end{cases}$$

$$(55) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x} \cos \vartheta + V_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \vartheta' d\vartheta'}{1 - \cos \vartheta'} \\ &\cdot \left\{ \cos^4 \vartheta' \left[e^{-x} - \left(1 - u \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta'}{2} \right) e^{-\frac{x}{\cos \vartheta'}} \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{-x} - \left(1 - v \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta'}{2} \right) e^{-\frac{x}{\cos \vartheta'}} \right\}, \\ &+ e^{-x} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin \vartheta' d\vartheta'}{1 - \cos \vartheta'} (\cos^4 \vartheta' + 1). \end{aligned} \right.$$

Wir integrieren nach x und unterdrücken sofort die Integrale der homogen gemachten Gleichungen (55), welche die Form

$q(\vartheta) e^{-\frac{x}{\cos \vartheta}}$ haben, weil uns nur U_1 und V_1 für $\vartheta > \pi/2$ interessiert, denn wir wollen uns auf die Zerstreuung zweiter Ordnung beschränken, und die in die Luft austretende Strahlung ist durch die U und V für $x=0$ und $\vartheta > \pi/2$ bestimmt.

Für $\vartheta > \pi/2$ müssen aber die Glieder mit $e^{-\frac{x}{\cos \vartheta'}}$ wegen der Grenzbedingung (46) verschwinden.

Die Integration ergibt für $x=0$, wenn wir $-\cos \vartheta = s$ setzen (wo s also positiv ist),

$$(56) \left\{ \begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{1+s} \left(\frac{1}{6} + \frac{s}{2} - 0,6971s^2 - \frac{5}{4}s^3 + 3s^4 + \frac{3}{2}s^5 - 3s^6 \right) \\ &\quad + (3 - 4s^2 + 3s^4) \frac{s^3}{1+s} \lg \frac{1+s}{s} + s^2 M_1 + 2(1-s^2) L_3 \\ &\quad \quad \quad + (3s^2 - 2) L_5, \\ V_1 &= \frac{0,8029}{1+s} + \frac{s}{1+s} \left(\frac{1}{4} - \frac{s}{3} + \frac{s^2}{2} - s^3 \right) \\ &\quad \quad \quad + \frac{s(1+s^4)}{1+s} \lg \frac{1+s}{s} + M_1 + L_5, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(57) M_1 = \int_0^1 \frac{v s' d s'}{(s+s')(1+s)}; \quad L_3 = \int_0^1 \frac{u s'^3 d s'}{(s+s')(1+s)}; \quad L_5 = \int_0^1 \frac{u s'^5 d s'}{(s+s')(1+s)}.$$

Da u und v nach (48) sich analytisch verschieden darstellen, je nachdem $\sin \vartheta \geq 1/n$, so zerlegen wir die Integrale in zwei Teile, von denen der erste von 0 bis s_0 , der zweite von s_0 bis 1 läuft, wo

$$s_0 = \cos \vartheta_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = 0,6613$$

ist. In dem ersten der beiden Teilintegrale machen wir die Substitution $\sin \Theta' = n \sin \vartheta'$, wo ϑ' durch $s' = \cos \vartheta'$ definiert ist, und erhalten

$$(58) \left\{ \begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi/2} \frac{v \sin \Theta' \cos \Theta' d\Theta'}{(1 + \cos \vartheta')(s + \cos \vartheta')} + \frac{1}{1-s} \lg(1 + s_0) \\ &\quad - \frac{s}{1-s} \lg \frac{s + s_0}{s}, \\ L_3 &= \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi/2} \frac{u \cos^2 \vartheta' \sin \Theta' \cos \Theta' d\Theta'}{(1 + \cos \vartheta')(s + \cos \vartheta')} + \frac{s_0^2}{2} - s_0(1 + s) \\ &\quad + \frac{1}{1-s} \lg(1 + s_0) - \frac{s^2}{1-s} \lg \frac{s + s_0}{s}, \\ L_5 &= \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi/2} \frac{u \cos^4 \vartheta' \sin \Theta' \cos \Theta' d\Theta'}{(1 - \cos \vartheta')(s + \cos \vartheta')} + \frac{s_0^4}{4} - (1 + s) \frac{s_0^3}{3} \\ &\quad + (1 + s + s^2) \frac{s_0^2}{2} - (1 + s + s^2 + s^3) s_0 \\ &\quad + \frac{1}{1-s} \lg(1 + s_0) - \frac{s^5}{1-s} \lg \frac{s + s_0}{s}. \end{aligned} \right.$$

Ist s genähert gleich 1, benutzt man besser die folgenden Näherungsformeln

$$(58') \left\{ \begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi/2} \dots + \lg(1 + s_0) - \frac{s_0}{1 + s_0} + \left(\frac{s_0^4}{1 + s_0} \right)^2 \frac{1-s}{2}, \\ L_3 &= \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi/2} \dots + \frac{s_0^2}{2} - s_0(1 + s) + 3 \lg(1 + s_0) - \frac{s_0}{1 + s_0} \\ &\quad - 3(1-s) \lg(1 + s_0) + \frac{1-s}{2} \frac{s_0(4 + 5s_0)}{(1 + s_0)^2}, \\ L_5 &= \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi/2} \dots + \frac{s_0^4}{4} - (1 + s) \frac{s_0^3}{3} + (1 + s + s^2) \frac{s_0^2}{2} \\ &\quad - (1 + s + s^2 + s^3) s_0 + 5 \lg(1 + s_0) - \frac{s_0}{1 + s_0} \\ &\quad - 10(1-5) \lg(1 + s_0) + \frac{1-s}{2} \frac{s_0(8 + 9s_0)}{(1 + s_0)^2}. \end{aligned} \right.$$

2*

Numerische Integration ergibt

Tabelle 3.

Θ	U_1	V_1	$U_1 d_s + V_1 d_p$	$K_0 = \frac{U_0 d_s + V_0 d_p}{U_0 d_s + V_0 d_p}$	$\frac{U_1 d_s + V_1 d_p}{U_0 d_s + V_0 d_p} = \gamma$
0°	0,9277	0,9277	1,816	0,9795	1,854
15	0,9108	0,9387	1,810	0,9696	1,867
30	0,8559	0,9616	1,778	0,9434	1,884
45	0,7705	0,9896	1,706	0,9005	1,892
60	0,6812	1,022	1,582	0,8303	1,906
75	0,6308	1,052	1,282	0,6566	1,953
90	0,5954	1,069	0,000	0,0000	1,990

Hier bedeutet Θ den ϑ entsprechenden Austrittswinkel in Luft. Ferner ist

$$d_s = 1 - u; \quad d_p = 1 - v; \quad U = \frac{\cos^2 \vartheta}{1 + \cos \vartheta}; \quad V = \frac{1}{1 + \cos \vartheta},$$

wie in § 1. Die Zerstreuung zweiter Ordnung verhält sich zu der erster Ordnung wie $\kappa\gamma$, wo γ durch die letzte Kolumne der Tab. 3 gegeben ist. γ variiert nicht sehr mit dem Winkel Θ .

Demnach erhalten wir in zweiter Näherung für die spezifische Intensität in Luft nach (49)

$$(K_s + K_p) \cos \Theta \sin \Theta d\Theta d\Phi \\ = \frac{J\kappa}{2\pi} [U_0 d_s + V_0 d_p + \kappa(U_1 d_s + V_1 d_p)] \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

oder da

$$J = J_0 \frac{4n}{(n+1)^2}; \quad \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{n^2} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta d\Phi$$

ist,

$$(59) K_s + K_p = \frac{J_0 \kappa}{2\pi} \frac{4n}{(n+1)^2} \frac{1}{n^2} K_0 (1 + \kappa\gamma) = 0,08770 J_0 K_0 \kappa (1 + \kappa\gamma).$$

$\kappa = \frac{3}{8} \frac{h}{h + h'}$ ergibt sich aus Tab. 2, K_0 und γ aus Tab. 3.

Da κ im Violetten bis 0,137 anwächst, ist der Einfluß der Zerstreuung zweiter Ordnung dort ziemlich beträchtlich (rund 26 Proz.), während er im langwelligen Teil des Spektrums ganz unwesentlich ist. Das Blau des Meeres wird somit durch diese Korrektur noch ausgesprochener.

§ 4. Zweite Integrationsmethode.

Die ungenügende Konvergenz für größere Werte von x läßt es wünschenswert erscheinen, sich nach einer anderen Integrationsmethode umzusehen. Ohne diese im Augenblick durchzuführen, wollen wir sie doch andeuten.

Man entwickle U und V nach Kugelfunktionen von $s = \cos \vartheta$, setze also

$$(60) \quad \begin{cases} U = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(s) \\ V = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(s), \end{cases}$$

wo die A und B Funktionen von x sind. Man substituiere diese Werte in (45) und berücksichtige die Entwicklung

$$s^2 = \frac{1}{3} P_0 + \frac{2}{3} P_2,$$

ferner die Integraleigenschaften der Kugelfunktionen sowie die Beziehung

$$s P_n = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}.$$

Dann erhält man, wenn A' und B' die Differentialquotienten nach x bedeuten,

$$(61) \quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n' \left(\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} + \frac{n}{2n+1} P_{n-1} \right) + A_n P_n \right\} \\ \quad = x \left\{ \left(2 A_0 - \frac{4}{15} A_2 + \frac{2}{3} B_0 + \frac{J}{6\pi} e^{-x} \right) P_0 \right. \\ \quad \left. + \left(-\frac{4}{3} A_0 + \frac{8}{15} A_2 + \frac{4}{3} B_0 + \frac{J}{3\pi} e^{-x} \right) P_2 \right\}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_n' \left(\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} + \frac{n}{2n+1} P_{n-1} \right) + B_n P_n \right\} \\ \quad = x \left(\frac{2}{3} A_0 + \frac{4}{15} A_2 + 2 B_0 + \frac{J}{2\pi} e^{-x} \right) P_0. \end{cases}$$

Setzt man links im ersten Summenglied $n' = n + 1$, im zweiten $n' = n - 1$, so folgt

$$\begin{aligned}
 (62) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n}{2n-1} A'_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} A'_{n+1} + A_n \right] P_n \\ & = \kappa \left\{ \left(2A_0 - \frac{4}{15} A_2 + \frac{2}{3} B_0 + \frac{J}{6\pi} e^{-x} \right) P_0 \right. \\ & \quad \left. + \left(-\frac{4}{3} A_0 + \frac{8}{15} A_2 + \frac{4}{3} B_0 + \frac{J}{3\pi} e^{-x} \right) P_2 \right\}, \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n}{2n-1} B'_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} B'_{n+1} + B_n \right] P_n \\ & = \kappa \left(\frac{2}{3} A_0 + \frac{4}{15} A_2 + 2B_0 + \frac{J}{3\pi} e^{-x} \right) P_0. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich folgende beiden Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}
 (63a) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{3} A'_1 + A_0 = \kappa \left(2A_0 - \frac{4}{15} A_2 + \frac{2}{3} B_0 + \frac{J}{6\pi} e^{-x} \right), \\ & \frac{1}{1} A'_0 + \frac{2}{5} A'_2 + A_1 = 0, \\ & \frac{2}{3} A'_1 + \frac{8}{7} A'_3 + A_2 = \kappa \left(-\frac{4}{3} A_0 + \frac{8}{15} A_2 + \frac{4}{3} B_0 + \frac{J}{3\pi} e^{-x} \right), \\ & \frac{3}{5} A'_2 + \frac{4}{9} A'_4 + A_3 = 0, \\ & \frac{4}{7} A'_3 + \frac{5}{11} A'_5 + A_4 = 0, \\ & \frac{5}{9} A'_4 + \frac{6}{13} A'_6 + A_5 = 0 \text{ usw.} \end{aligned} \right. \\
 (63b) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{3} B'_1 + B_0 = \kappa \left(\frac{2}{3} A_0 + \frac{4}{15} A_2 + 2B_0 + \frac{J}{2\pi} e^{-x} \right), \\ & \frac{1}{1} B'_0 + \frac{2}{5} B'_2 + B_1 = 0, \\ & \frac{2}{3} B'_1 + \frac{3}{7} B'_3 + B_2 = 0, \\ & \frac{3}{5} B'_2 + \frac{4}{9} B'_4 + B_3 = 0, \\ & \frac{4}{7} B'_3 + \frac{5}{11} B'_5 + B_4 = 0, \\ & \frac{5}{9} B'_4 + \frac{6}{13} B'_6 + B_5 = 0 \text{ usw.} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Die Integration dieser beiden Systeme und die Bestimmung der Konstanten durch die Grenzbedingungen würde die Lösung unseres Problems ergeben.

La Plata, Instituto de Física, 14. März 1924.

(Eingegangen 26. April 1924.)

2. Ausdehnungsmessungen bei tiefen Temperaturen mit Doppelspiegeldilatometer; von G. Borelius und C. H. Johansson.

1. Einleitung.

Für Ausdehnungsmessungen bei tiefen Temperaturen sind schon verschiedene Methoden benutzt worden. Dewar und Fullerian¹⁾ ermittelten Ausdehnungskoeffizienten aus der durch Auftrieb in flüssiger Luft gemessenen Dichte. Kamerlingh Onnes und Heuse²⁾, Kamerlingh Onnes und Clay³⁾, sowie Scheel und Heuse⁴⁾ untersuchten lange Stäbe mit dem Komparator. Henning⁵⁾, Lindemann⁶⁾ und Scheel⁷⁾ maßen die Ausdehnung von Stäben nach der Rohrmethode von Henning. Grüneisen⁸⁾ maß die relative Längenänderung ziemlich dicker, 25 cm langer Stäbe nach einer speziellen Spiegelmethode. Nach der Methode von Fizeau endlich sind von Ayres⁹⁾, Dorsey¹⁰⁾, Scheel¹¹⁾, Röntgen¹²⁾, Scheel und Heuse¹³⁾, Valentiner und Wallot¹⁴⁾, Disch¹⁵⁾ eine

- 1) J. Dewar u. Fullerian, Proc. Roy. Soc. 70. S. 237. 1902.
- 2) H. Kamerlingh Onnes u. W. Heuse, Com. Leiden 85. 1903.
- 3) H. Kamerlingh Onnes u. Clay, Com. Leiden 95b. 1906.
- 4) K. Scheel u. W. Heuse, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 9. S. 449. 1907.
- 5) F. Henning, Ann. d. Phys. 22. S. 631. 1907.
- 6) Ch. L. Lindemann, Phys. Zeitschr. 12. S. 1197. 1911. 13. S. 737. 1912.
- 7) K. Scheel, Zeitschr. f. Phys. 5. S. 167. 1921.
- 8) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 33. S. 33. 1910.
- 9) H. D. Ayres, Phys. Rev. 20. S. 38. 1905.
- 10) H. Dorsey, Phys. Rev. 25. S. 88. 1907. 27. S. 1. 1908. 30. S. 271. 1910.
- 11) K. Scheel, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 9. S. 3. 1907.
- 12) W. C. Röntgen, Münch. Ber. 1912. S. 381.
- 13) K. Scheel u. W. Heuse, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 16. S. 1. 1914.
- 14) S. Valentiner u. J. Wallot, Ann. d. Phys. 46. S. 837. 1915.
- 15) J. Disch, Ztschr. f. Phys. 5. S. 173. 1921.

Menge verschiedener Stoffe meist in der Form kleiner Zylinder-
ringe untersucht worden.

Mit den Stabmethoden wurden bis jetzt fast ausschließ-
lich Mittelwerte der Ausdehnungskoeffizienten zwischen den
ziemlich weit voneinander liegenden Temperaturen, die mit
konstanten Kältebädern dargestellt werden können, ermittelt.
Nach der Methode von Fizeau sind dazu noch kontinuier-
liche Messungen ausgeführt worden. Die Methode von Fizeau
hat aber den Übelstand, für Stäbe schwer verwendbar oder
jedenfalls noch nicht ausgeformt zu sein. Die folgende Methode
ist nun für Messungen an kleinen Stäben oder Drahtstückchen
beabsichtigt. Sie ist zunächst für Messungen an Kupfer, Zink
und Cadmium benutzt worden.

Nachdem unsere hier mitgeteilten Messungen an Zink
und Cadmium schon abgeschlossen waren, erschien eine Arbeit
von Grüneisen und Goens¹⁾ über denselben Gegenstand.
Da diese Forscher in der Herstellung von geeignetem Unter-
suchungsmaterial weiter gekommen sind als wir, können unsere
Messungen an diesen Metallen jetzt hauptsächlich als Beleg
ihrer Resultate von Interesse sein.

2. Der Doppelspiegeldilatometer.

Zur Beobachtung der Ausdehnung ist eine Vorrichtung
benutzt worden, die wir als Doppelspiegeldilatometer bezeichnen
können. Sie ist der Königschen Doppelspiegelmethode zur
Beobachtung der Biegung von Stäben nachgebildet worden.
Ein hartgewalzter Messingstreifen liegt auf zwei horizontalen
Schneiden in kleiner Entfernung. Die freien Enden des
Streifens sind nach unten gebogen und tragen gegeneinander
gerichtete kleine Glasprismen, die als Spiegel dienen sollen.
In der Mitte zwischen den Schneiden liegt von oben das untere
schneidenförmige Ende des Probestabes am Streifen an und
gibt ihm eine kleine Biegung nach unten. Bei der Ausdehnung
des Probestabes wächst die Biegung, und der Winkel zwischen
den Spiegeln ändert sich in einer Weise, die nur von der
Senkung der Streifenmitte x und dem Schneidenabstand b ab-
hängt, von den elastischen Eigenschaften des Streifens dagegen

1) E. Grüneisen u. E. Goens, Phys. Zeitschr. 24. S. 506. 1923.

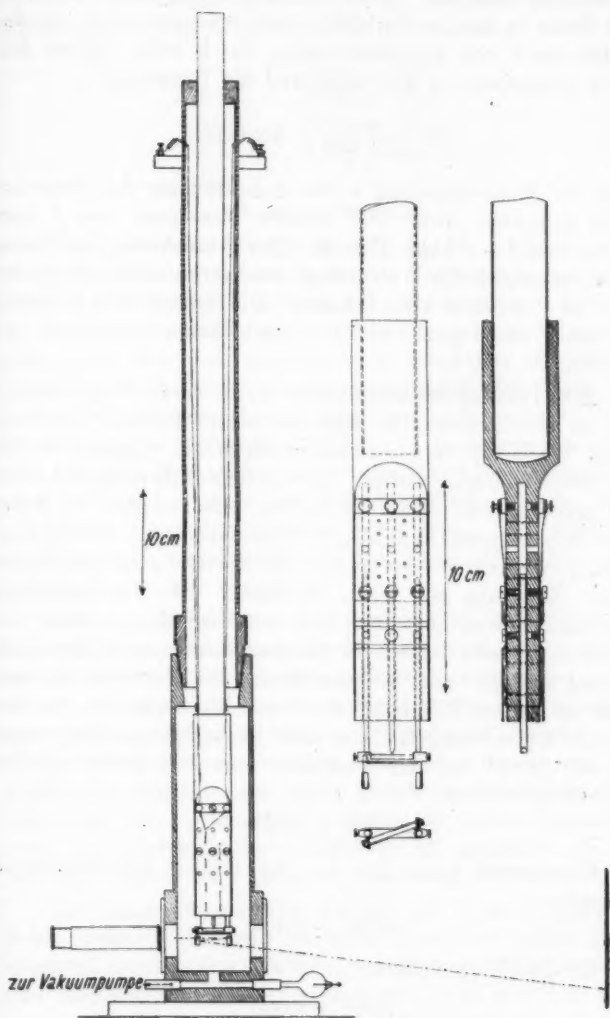


Fig. 1.

unabhängig sein soll. Wird (vgl. Fig. 1) mit einem Fernrohr eine Skala in der im Verhältnis zum Spiegelabstand d großen Entfernung l von der Streifenmitte durch beide Spiegel hindurch beobachtet, so gilt annähernd die Beziehung

$$x = \frac{bs}{12(l+d)} + \text{Konstante},$$

wenn der Skalenausschlag s vom Schnittpunkte der Fernrohrachse gerechnet wird. Bei unseren Messungen war b etwa 2,6 cm und $l+d$ etwa 270 cm. Eine Ausdehnung des Probestabes um eine halbe Wellenlänge des Natriumlichtes entspricht dann an der Skala etwa 0,4 mm. Die Schärfe der Ablesung ist somit ebensogroß wie bei der Interferenzmethode von Fizeau.

Eine Prüfung des Dilatometers wurde derart vorgenommen, daß an der Streifenmitte eine mit einem vertikal verschiebbaren Mikroskop fest verbundene Schneide angelegt wurde. Die Verschiebungen wurden teils in dem Mikroskop an einer 0,01 mm-Glasskala direkt beobachtet, teils aus dem im Fernrohre beobachteten Ausschlage, Schneidenabstand und Skalenabstand, und unter Anbringung von Korrekturen, von denen später die Rede sein wird, berechnet. Bei Verschiebungen abwechselnd nach oben und nach unten wurden jedesmal Ablesungen an acht Stellen in gleicher durchschnittlicher Entfernung von 0,05 mm vorgenommen. Die Verschiebung war somit im ganzen 0,35 mm, oder etwa ebenso groß wie bei den Ausdehnungsmessungen. Aus acht Beobachtungsreihen ergab sich als Mittel für das Verhältnis von berechneten zu beobachteten Werten:

$$0,997 \pm 0,003.$$

Die Einzelmittel waren für die vier Reihen mit gehobenem Mikroskop

$$0,993 \pm 0,006,$$

und für die mit gesenktem

$$1,001 \pm 0,003.$$

Die Methode scheint somit richtige Werte zu geben. Die Werte sind auch in weiten Grenzen von der Biegung des

Streifens unabhängig. Wir erhielten nämlich für die verschiedenen Intervalle die folgenden Mittelwerte:

1—5:	$1,001 \pm 0,003,$
2—6:	$0,998 \pm 0,006,$
3—7:	$0,993 \pm 0,007,$
4—8:	$0,995 \pm 0,005.$

3. Meßanordnung.

Fig. 1 zeigt die Meßanordnung, die für Stäbe von 6 bis 12 cm Länge dimensioniert war. Zur Untersuchung gelangten Stäbe von etwa 8 cm Länge und 2—4 mm Dicke. Der Stab wurde in einer vertikalen Ausbohrung in einem Kupferstück angebracht und oben zwischen zwei Schrauben eingeklemmt. Das Ende der einen Schraube hatte dabei die Form einer horizontal gestellten Schneide, von der aus die effektive Länge des Stabes gerechnet werden konnte. In Ausbohrungen beiderseits von dem Probestabe waren Quarzröhrchen eingesetzt und oben in derselben Höhe und derselben Weise wie der Probestab fixiert. Die Quarzröhrchen waren unten mit einem angeschraubten Querstück mit zwei Schneiden zur Auflegung des Dilatometerstreifens verbunden.

Um dem Kupferstück die gewünschten tiefen Temperaturen zu geben, war es an einem langen dünnwandigen Messingrohr befestigt, in das die flüssige Luft hineingegossen werden konnte. Kupferstück und Rohr waren außen von einem mit einer konischen Fuge versehenen Vakuumgefäß umgeben. Das Ganze bildete so ein zerlegbares metallisches Dewargefäß. Das Evakuieren geschah mit einer Quecksilberdampfstrahlpumpe aus Quarz. Als Vakuumprüfer diente ein kleines Entladungsrohr. Am Fußstück des Gefäßes waren gegenüber einander zwei mit Glasscheiben gedeckte Fenster angebracht.

Die Temperaturmessung geschah mit einem Platinthermometer, dessen Widerstand mit einer Thomsonbrückenschaltung gemessen wurde. Der Platindraht war durch feine Löcher in dem Kupferstück isoliert durchgezogen. Die vier Zuleitungen gingen, in Messingröhrchen eingekittet, durch die Wandung des Vakuumgefäßes hindurch. Die Kalibrierung des Thermometers wurde bei den Temperaturen des flüssigen Sauerstoffs,

des Kohlensäureschnees, des Eises und des siedenden Wassers ausgeführt und ergab für die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes:

$$R = R_0 (1 + 0,003740 t - \beta t^2),$$

wo

$$\beta = 0,734 \cdot 10^{-6} \text{ für } t < 0$$

und

$$\beta = 0,420 \cdot 10^{-6} \text{ für } t > 0$$

ist.

Tiefe Temperaturen wurden wie gesagt mit flüssiger Luft hergestellt. Nach dem Abdampfen der Luft stieg die Temperatur des Kupferstückes zuerst mit etwa ein Grad pro Minute. Durch eine im Messingrohr eingeführte elektrische Heizspirale konnte auch bei höheren Temperaturen eine ähnliche Geschwindigkeit festgehalten werden. Eine kontinuierliche Senkung der Temperatur von der Zimmertemperatur aus bis zu etwa -80° wurde dadurch erzielt, daß ein mit flüssiger Luft gefülltes Glasrohr in dem Messingrohr mehr oder weniger weit hineingeführt wurde.

4. Korrekturen und Fehlerquellen.

An der nach Gl. (1) berechneten Ausdehnung des Probestabes müssen verschiedene Korrekturen angebracht werden.

1. Die Tangentkorrektur der Skalenablesung wird durch den Faktor

$$\frac{4 \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} 4 \varphi} = 1 - \frac{5}{16} \frac{\varphi^2}{\pi^2} + \dots$$

angebracht.

2. Der Lichtstrahl erfährt in den Glasfenstern und in einer Glasscheibe, die vor der durchsichtigen, an einer Gelatinehaut gezeichneten Skala als Schutz angebracht war, eine Parallelverschiebung. Die Korrektur hierfür beträgt annähernd

$$\frac{s}{l} \frac{n-1}{n} \cdot d,$$

wo n Brechungsindex des Glases und d die gesamte Dicke von Fenstern und Skala bedeutet. d war gleich 8 mm, n wurde zu 1,5 gesetzt.

3. Der Prismenabstand d , der von geeignetem Punkte im Innern der Prismen gerechnet werden muß, ändert sich bei der Ausdehnung. Die Änderung beträgt aber nur wenige

Millimeter und ist bei der Seite vom Skalenabstand (etwa 280 cm) zu versäumen.

4. Das Ende des Probestabes wurde immer in der Mitte zwischen den beiden Schneiden an dem federnden Streifen angelegt. Eine fehlerhafte Anlegung kann zwar ein Fehler hervorbringen, die seitliche Verschiebung muß aber, wie leicht berechnet werden kann, bei einem Schneidenabstand von 26 mm etwa 1 mm betragen, damit in der berechneten Ausdehnung ein Fehler von 1 Proz. auftreten soll. So große Verschiebungen können nun leicht vermieden werden.

5. Die Quarzröhren dehnen sich aus. Hierfür wird korrigiert, indem zum berechneten Ausdehnungskoeffizienten des Probestabes der des Quarzes addiert wird. Es war zwar eine kleine Differenz zwischen den effektiven Längen des Probestabes und der Quarzröhren vorhanden. Da die Schneiden in derselben Höhe wie die zuhörenden Schrauben angebracht waren, war diese Differenz gleich der Senkung der Streifenmitte und konnte wegen der Kleinheit der Ausdehnung des Quarzes versäumt werden. Für die Berechnung der Ausdehnung des Quarzes wurden die Messungen von Dorsey zugrunde gelegt.

6. Die Änderung des Schneidenabstandes mit der Temperatur gibt zum berechneten Ausdehnungskoeffizienten die Korrektion

$$\frac{x}{L} \cdot \alpha_s$$

wo x die Senkung der Streifenmitte unter der Schneidenhöhe, L die Länge des Probestabes und α_s den Ausdehnungskoeffizient des Schneidenstückes bedeutet. Diese Korrektion, die nicht angebracht worden ist betrug bei einem zuerst benutzten Schneidenstück aus Messing höchstens $0,15 \cdot 10^{-6}$ und wurde später durch die Benutzung von Invar verschwindend klein gemacht.

7. Da die Herstellung des Schneidenstückes ganz aus Invar wegen Mangel an Material zunächst nicht möglich war, wurde es teils aus Invar, teils aus Messing gefertigt. Dieses Stück hatte im Gegensatz zu dem ganz aus Messing gemachten, eine kleine Eigenausdehnung in vertikaler Richtung, für die rechnerisch korrigiert werden mußte.

8. Die leicht berechnete elastische Längenänderung des Probestabes wegen der Rückwirkung des gebogenen Streifens

war bei den benutzten Stabdimensionen immer verschwindend klein.

9. Die Biegung des Streifens wegen der Schwere der Prismen kann, wie eine Berechnung ergab, höchstens einen Fehler von 0,5% im Ausdehnungskoeffizient herbeiführen.

10. Besonders gefährlich wäre es, wenn bei dem Gang der Temperatur zwischen Probestab und Platintermometer größere Temperaturunterschiede entstehen könnten. Es ist dies eine Schwierigkeit, die jede Methode, die nicht mit konstanten Temperaturbädern arbeitet, entgegensteht. Bei der Konstruktion des Apparates ist dieser Sache besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Bei einer Temperaturänderung von 1 Grad pro Minute dürfte der Unterschied nicht groß sein können. Bei der Festhaltung einer konstanten Geschwindigkeit der Temperaturänderung wird sein Einfluß auf den berechneten Ausdehnungskoeffizienten noch weiter herabgesetzt. In der Tat haben wir auch bei sinkender und steigender Temperatur gut übereinstimmende Werte erhalten.

11. Andere Fehlerquellen sind Temperaturunterschiede in den verschiedenen Teilen des Feders, Reibung an den Schneiden, Umwandlungs- und Nachwirkungserscheinungen verschiedener Art in den Apparateilen. Es ist aber zu erwarten, daß diese Sachen mehr zufällige Fehler hervorbringen können, deren Einfluß bei dem Durchgang größerer Temperaturgebiete ausgeglichen werden. Über die Größe der zufälligen Fehler geben die im folgenden Abschnitt mitgeteilten Versuchsreihen Aufschluß.

5. Messungen an Kupfer zur Prüfung der Methode.

Unter variierten Bedingungen sind zu verschiedenen Zeiten mehrere Versuchsreihen an Kupfer ausgeführt worden. Dabei gelangten zwei verschiedene Kupferdrahtstücke zur Untersuchung, von denen das eine als besonders rein ausgewählt war und dessen Widerstand von der liefernden Firma: Sieverts Kabelwerke zu Stockholm zu 1680 Ohm/cm bei 15° angegeben wurde.

Bei der Berechnung der Ausdehnungskoeffizienten wurden von den korrigierten Skalenablesungen s geeignete, von der Temperatur linear abhängige Näherungswerte, $\text{Konst.} + c \cdot t$, abgezogen, und die erhaltenen Differenzen Δ wurden (vgl. Fig. 2) gegen t in ziemlich großem Maßstabe aufgetragen,

graphisch ausgeglichen und von 20 zu 20° deriviert. Die Ausdehnungskoeffizienten wurden dann aus

$$\alpha = k \left[\frac{d\Delta}{dt} + c \right] + \alpha_{\text{Quarz}}$$

berechnet, wo k eine vom Schneiden- und Skalenabstand und Stablänge abhängige Konstante ist.

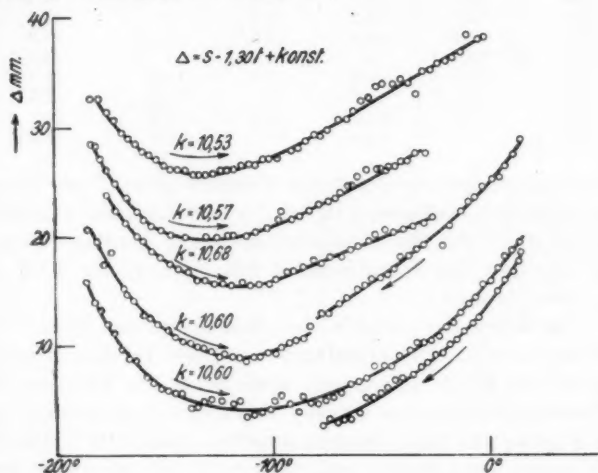


Fig. 2.

Die Resultate der 6 Versuchsreihen sind in Tab. 1 (für das reinste Kupfer) und Tab. 2 zusammengestellt worden. Die Reihen 1—5 sind bei steigender, 6 bei abnehmender Temperatur aufgenommen. Bei 1—3 war die Geschwindigkeit der

Tabelle 1.
Reinstes Kupfer.

T	1.	2	$\alpha_m \cdot 10^6$
103	10,6	10,0	10,3
113	11,4	11,1	11,25
133	12,7	12,8	12,75
153	13,9	13,7	13,8
173	14,4	14,3	14,35
193	14,9	14,7	14,8
213	15,2	15,0	15,1
233	15,3	15,3	15,3

Tabelle 2.
Kupfer.

T	3.	4.	5.	6.	$\alpha_m \cdot 10^6$
103	10,2	9,8	10,1	—	10,05
113	11,1	11,0	11,1	—	11,05
133	12,2	12,1	12,4	—	12,2
153	13,7	13,2	13,3	—	13,4
173	14,4	14,3	13,9	—	14,2
193	14,7	—	14,4	—	14,55
213	14,9	15,4	15,0	15,1	15,05
233	15,1	15,7	15,4	15,4	15,4
253	—	16,0	16,2	16,0	16,1
273	—	16,6	16,7	17,0	16,75

Temperatursteigerung bei tiefen Temperaturen 1° pro Minute und nahm bei Annäherung an die Zimmertemperatur allmählich ab, bei 4—6 war die Temperaturänderung konstant. Für 1 und 2 wurde das Schneidestück aus Messing, für 3—6 das aus Invar benutzt.

Die Werte der verschiedenen Reihen stimmen bis auf etwa 4 Proz. überein. Die Mittelwerte aus den Tabellen 1 und 2 sind in der Fig. 3 eingetragen sowie auch die Resultate der früheren Messungen von Dorsey für tiefere Temperaturen und von Fizeau für Temperaturen zwischen 0 und 100° . Die Abweichungen der 4 Reihen sind nicht groß, sie entsprechen doch wahrscheinlich einer kleinen Verschiedenheit der verschiedenen Kupferproben. Gemäß der von der Theorie von Grüneisen¹⁾ geforderten Ähnlichkeit der Kurven für Ausdehnungskoeffizienten und spezifischen Wärmen bei tiefen Temperaturen können die Werte aus Tab. 2 durch die gezogene Kurve mit der Gleichung

$$\alpha = \frac{C_p}{370000 - 19 U}$$

befriedigt werden, wo C_p und $U = \int_0^T C_p dT$ den nach Messungen von Nernst²⁾ und Kamerlingh Onnes³⁾ von Miething⁴⁾ berechneten Tabellen entnommen sind, und nur die zwei Kon-

1) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 39. S. 257. 1912.

2) W. Nernst, Sitzungsber. Preuß. Akad. 1912. S. 1162.

3) H. Kamerlingh Onnes, Leiden Com. Nr. 143. 1914.

4) H. Miething, Tabellen usw., Halle 1920.

stanten passend gewählt wurden. Die Beobachtungen an dem reinsten Kupfer sowie die Messungen Dorseys stimmen mit

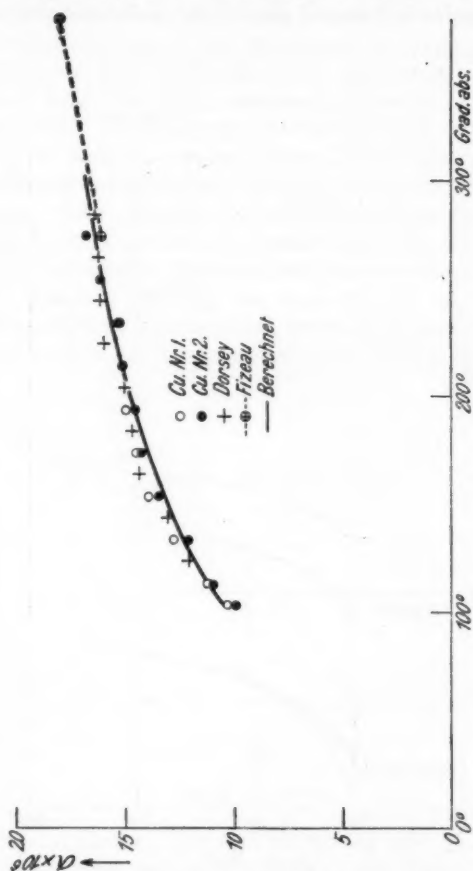


Fig. 3. Kupfer.

diesen Werten für die spezifische Wärme etwas schlechter überein, sie geben etwas höhere Werte der charakteristischen Temperaturen der benutzten Kupferproben.

6. Messungen an Zink und Cadmium.

Die von uns untersuchten Proben von Zink und Cadmium (Marke „Kahlbaum“) waren in Glasröhren von etwa 3 mm

innerer Weite gegossen. Bei einem Teil der Proben wurde durch schnelles Herausziehen des Rohres aus dem Ofen die ganze Schmelze auf einmal abgekühlt. Bei einem anderen Teil

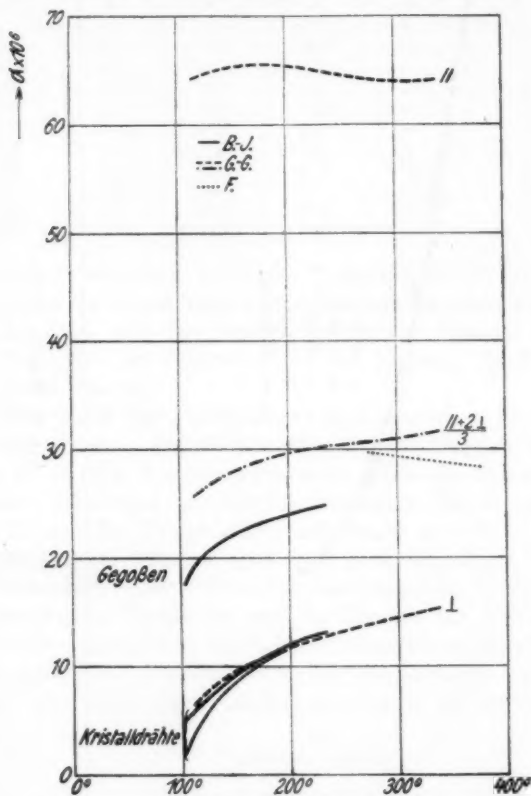


Fig. 4. Zink.

wurde der vertikal gestellte Röhrenofen mit einer Geschwindigkeit von nur etwa 1 mm pro Minute gehoben, so daß das Erstarren langsam von unten erfolgte. Im ersten Falle wurde ein wenig orientiertes Kristallgefüge erhalten, im zweiten eine bestimmte Orientierung der Kristallachse der hexagonal kristallisierenden Metalle.

Die Resultate für Zink sind in der Fig. 4 mit denen von Grüneisen und Goens zusammengestellt. Die gestrichelten Kurven geben die Resultate dieser Forscher für senkrecht (\perp) und parallel (\parallel) zur Achse orientierte, aus einer Schmelze herausgezogene Einkristalldrähte und dazwischen die hieraus berechnete Kurve für nicht orientiertes Material ($\frac{1}{3}(2\perp + \parallel)$). Als eine Stütze der Messungen ist hervorzuheben, daß die von Fizeau an Material aus gepreßtem Pulver erhaltenen Ausdehnungskoeffizienten ihrer Größe nach dieser berechneten Kurve naheliegen. Unsre langsam erstarrten Zinkdrähte (in der Figur als Kristalldrähte bezeichnet) stimmen nun mit den senkrecht zur Achse orientierten Einkristalldrähten gut überein.

Die Resultate für Cd, von dem wir zwei gegossene und zwei Kristalldrähte untersuchten, waren ganz analog, nur war die Orientierung der langsam erstarrten Drähte nicht genau

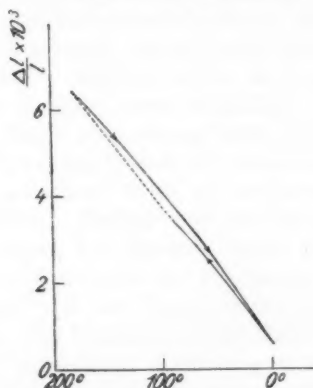


Fig. 5. Cadmium.

senkrecht zur Achse. Die eine Kurve lag etwa 3, die andere etwa $1 \cdot 10^{-6}$ über der von Grüneisen und Goens erhaltenen \perp -Kurve.

Für die Verhältnisse in einem Gefüge aus Kristallen mit großer Verschiedenheit der Ausdehnung in verschiedenen Richtungen geben die folgenden Messungen an einem gegossenen Cd-Draht ein Beispiel. Bald nach der Herstellung der schnell erstarrten Probe war der Ausdehnungskoeffizient bei Zimmer-

temperatur $35 \cdot 10^{-6}$. Nach 6 Monaten war er zu $30 \cdot 10^{-6}$ geändert, was wohl die Ausgleichung innerer Spannungen durch teilweise Umkristallisation oder Gleitungen im Kristallgefüge zuzuschreiben ist. Wenn nun dieses gealterte Material abgekühlt und wieder erwärmt wurde, ergab es die in der Fig. 5 gezeichnete, bei Zimmertemperatur geschlossene Hysteresisschleife. Ordinate ist hier die relative Längenänderung.

Stockholm, Physikal. Institut der Technisch. Hochschule,
Mai 1924.

(Eingegangen 10. Mai 1924.)

3. *Beitrag zur Erweiterung und Verbesserung des Systems sekundärer Wellenlängennormalen;* *von P. Wallerath.*

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Bonn.)

1. Einleitung.

Für die Verbesserung des Systems der Wellenlängen sind bekanntlich vor einer Reihe von Jahren gewisse internationale Vereinbarungen getroffen worden, die in ihren Grundzügen auch heute noch gelten, wenngleich die damalige Trägerin der Vereinbarungen, die „International Union for solar research“ als internationale Korporation zurzeit nicht mehr existiert. Unabhängig von dieser Sachlage schien es angezeigt, die Mitarbeit an dieser Aufgabe, deren endgültige Lösung nicht von einer einzelnen Stelle aus erfolgen kann, wieder aufzunehmen. Insbesondere gilt es, das System der Normalen in dem Wellenlängenbereiche unterhalb 3000 zu verbessern und gewisse Lücken auszufüllen. Endlich sind die Eisennormalen durch andere zu ergänzen. Die folgende Arbeit stellt einen ersten Bericht über die Ergebnisse der Messungen dar die ich auf Veranlassung und mit der Unterstützung von Prof. Konen ausgeführt habe. Mit Rücksicht auf die Kritik der gewonnenen Endzahlen und zugleich zur Abkürzung molarer Mitteilungen ist dabei die Versuchsanordnung breiter geschildert, als es sonst vielleicht erforderlich gewesen wäre.

2. Methode, Versuchsanordnung und Apparate.

Wie schon K. W. Meissner¹⁾ zu Eingang seiner „Interferometrischen Wellenlängenmessungen im roten Spektralbezirk“ hervorhebt, kommt für eine exakte Bestimmung der Wellenlänge irgendwelcher Spektrallinien in unmittelbarer Anlehnung an die primäre Wellenlängennormale Cd, λ 6438

1) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. 51. S. 95—116. 1916.

Å.-E. nur eine einzige Methode in Frage: die von Perot und Fabry¹⁾ ersonnene, von Fabry und Buisson²⁾ verbesserte Interferenzmethode. Nach diesem Verfahren, das die bereits international festgelegten sekundären Normalen geliefert hat, und nach welchem exakte interferometrische Wellenlängenvergleiche heute ausschließlich durchgeführt werden, sind auch die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit gewonnen. Da seine Theorie im einzelnen bereits des öfteren dargelegt worden ist^{3), 4), 5), 2), 6), 7)}, beschränke ich mich in dieser Mitteilung darauf, die zur Berechnung der Versuchsergebnisse dienenden Formeln an gegebener Stelle kurz zu erläutern.

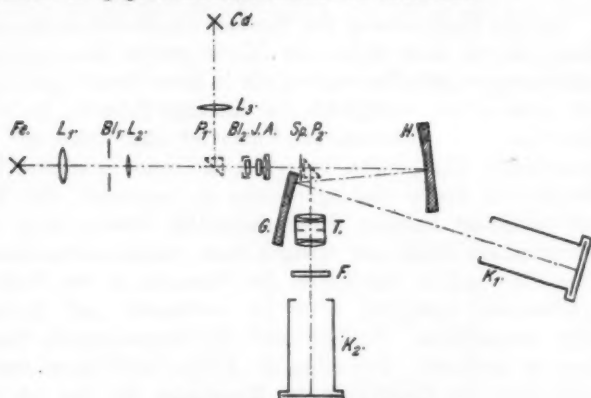


Fig. 1. Versuchsanordnung.

Eine schematische Darstellung der Versuchsanordnung gibt Fig. 1. Das Licht der Eisenbogenlampe Fe wird durch die einfache Quarzlinse L_1 auf die vertikale Blende Bl_1 projiziert, die in der Höhe der optischen Achse einen wagerechten Spalt von $1\frac{1}{4}$ mm Breite aufweist. Je eine zu diesem parallele Gerade in gleichem Abstand von der Mitte des Schlitzes be-

- 1) Ch. Fabry u. A. Perot, *Astroph. Journ.* **15**. S. 73—96. 1902.
- 2) Ch. Fabry u. H. Buisson, *Journ. de Physique*, März 1908.
- 3) Ch. Fabry u. A. Perot, *Ann. de Chim.* **25**. S. 110. 1902.
- 4) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (6) **11**. S. 685—703. 1906.
- 5) P. Eversheim, *Zeitschr. f. wiss. Photogr.* (5) **5**. S. 152—180. 1907.
- 6) A. H. Pfund, *Astroph. Journ.* **28**. S. 197—211. 1908.
- 7) P. Eversheim, *Ann. d. Phys.* **30**. S. 815—839. 1909.

grenzen auf der Blende einen horizontalen Streifen von 12 mm Breite, in dessen Mitte die $1\frac{1}{4}$ mm-Zone für den Durchgang des Eisenbogenlichtes frei ist. Der Abstand der Blende Bl_1 von L_1 ist gleich der doppelten Brennweite dieser Linse. Der mit senkrechter Achse brennende Pfund-Bogen¹⁾ wird durch L_1 auf Bl_1 abgebildet und auf eine solche Länge ausgezogen, daß die einander zugekehrten Elektrodenenden im Blendenbild genau die obere, bzw. untere Grenzmarke berühren. Der Bogen brennt dann mit der vom Wellenlängenausschuß der Internationalen Union vorgeschriebenen Länge, und nur seine zur Achse senkrechte Zentralzone von $1\frac{1}{4}$ mm Breite wird als Lichtquelle benutzt — wie verlangt. Das von Bl_1 durchgelassene Licht wird mit schwacher Neigung durch die einfache Quarzlinse L_2 auf das Interferometer I projiziert. Die Güte der von Zeiss hergestellten Interferometerplatten sowie die Gleichmäßigkeit der auf ihnen niedergeschlagenen Silber Spiegel gestatteten, eine kreisförmige mittlere Partie der Platten von etwa 10 mm Durchmesser für die Interferenz auszunutzen. Die Blende Bl_2 , welche die vordere Quarzplatte des Etalons bedeckt, gibt diesen Teil der versilberten Luftschicht für das Licht frei. Unmittelbar hinter dem Interferometer befindet sich der Quarz-Fluorit-Achromat A . von 250 mm Brennweite, ebenfalls von der Firma Zeiss, der speziell für kurze Wellen und für Grün korrigiert ist.²⁾ In der Brennebene von A schneidet der Präzisionsspalt Sp aus dem hier entworfenen System von Interferenzringen den senkrechten Durchmesser heraus. Sp gehört zu dem Spektrographen, der des weiteren noch aus dem Konkavgitter G , dem Hohlspiegel H und der Kamera K_1 besteht. Das diesen Spalt passierende Licht trifft auf den Hohlspiegel H , einen von Brashear in Pittsburg, Pa. (Allegheny) U. S. A., gelieferten Gittermetallspiegel von 1 m Brennweite, der praktisch fehlerfreie Bilder liefert. Die Distanz $Sp-H$ ist genau gleich der Brennweite dieses Hohlspiegels. H ist um einen kleinen Betrag aus der Stellung normal zur optischen Achse der Apparatur gedreht, so daß das von diesem Spiegel

1) A. H. Pfund, *Astroph. Journ.* 27. S. 296—298. 1908.

2) Eine systematische Untersuchung ultraviolett durchlässiger Linsen nach einer der Hartmannschen nachgebildeten Methode ist im hiesigen Institut ausgeführt worden. (Diss. Lauscher, 1921.)

reflektierte Parallelstrahlenbündel das Konkavgitter G , welches unmittelbar neben dem Spalt Sp aufgestellt ist, mit nur sehr schwacher Neigung gegen die optische Achse trifft. G ist ein von Rowland hergestelltes Konkavgitter von 12 Fuß (= 4 m) Krümmungsradius. Es enthält 10000 Furchen pro Zoll (= 2,54 cm). Die Furchenlänge beträgt 50 mm und die Gesamtfurchenzahl 45000.¹⁾ Das Spektrum 1. Ordnung ist beiderseits sehr lichtstark, dasjenige 2. Ordnung auf der benutzten Seite von ausreichender Intensität, um sämtliche in das Programm der vorliegenden Arbeit aufgenommenen Linien, die in 2. Ordnung photographiert werden mußten, genügend lichtstark zu erhalten. Die Dispersion dieses Gitters beträgt in der 1. Ordnung 12 Å.-E./mm; in der 2. Ordnung lassen sich bei angemessener Spaltbreite Linien von 0,7 Å.-E. gegenseitiger Entfernung noch so scharf voneinander getrennt photographieren, daß die Messung der Interferenzringdurchmesser durch die Nachbarlinie nicht gestört wird.

Eine passende Dimensionierung des Spaltes Sp und geeignete Montierung des Gitters G gestatten, mit letzterem so nahe an Sp heranzugehen, daß der Spaltschlitz und die Mitte seines von H auf dem Gitter entworfenen Bildes — vom Hohlspiegel aus betrachtet — nur etwa 2° voneinander entfernt sind. Diese Anordnung in Verbindung mit der Möglichkeit, das Gitter derart zu drehen und die Kamera K_1 jeweils so zu justieren, daß das zu photographierende Spektralgebiet in der Richtung der Gitternormale liegt, beseitigen den Astigmatismus der Bilder praktisch vollkommen.

Die photographische Platte, auf welcher in K_1 ein fast normales Spektrum entworfen wird, steht parallel zur Gitterfläche. Es werden ebene Platten von der Größe 5×9 cm verwandt, auf denen ein Bereich von etwa 1000 Å.-E. des Spektrums 1. Ordnung in seiner ganzen Ausdehnung scharf photographiert werden kann.

Zur Aufnahme des Ringsystems der primären Normale schlug ich den schon von Burns und Meggers²⁾ mit Erfolg

1) Das Gitter ist eine Leihgabe von Prof. J. S. Ames an Prof. Konen. Auch an dieser Stelle sei dafür gedankt.

2) K. Burns u. W. F. Meggers, Bull. Bur. Stand. 12. S. 179 bis 197. 1915.

betretenen Weg ein, bei welchem die Aufnahme des Versuchsspektrums und die der Vergleichslinie nicht neben-, sondern nacheinander gemacht werden.¹⁾ Das Licht der seitlich der optischen Achse motierten \cap -förmigen Quarz-Cadmiumlampe Cd (vgl. Fig. 1) von Heraeus-Hanau/Main wird durch die Quarzlinse L_3 auf das totalreflektierende Quarzprisma P_1 projiziert, von diesem in die optische Achse hineingelenkt und unter schwacher Neigung zum Interferometer gesandt. Es passiert dann das Etalon I , den Achromaten A und den Spektrographenspalt Sp unter denselben optischen Bedingungen wie das Eisen- oder das Neonlicht. Unmittelbar hinter Sp wird es durch das zweite Reflexionsprisma P_2 im rechten Winkel zur optischen Achse wieder abgelenkt und trifft bei T auf das Objektiv der Kamera K_2 , ein Zeiss-Tessarsystem von 135 mm Brennweite und einer relativen Öffnung von $F:4,5$. Auf dem Wege von T zur photographischen Platte in K_2 passiert das Cadmiumlicht noch das Filter F , ein Wratten- und Wainright-Rotfilter. Von sämtlichen Wellenlängen des Cadmiums läßt es nur die rote Linie λ 6438 Å.-E. durch. Für die Aufnahme der Vergleichsnormale benutzte ich in K_2 photographische Platten von der Größe 6×6 cm.

Mit Ausnahme des Gitters und des Hohlspiegels sind sämtliche Hilfsapparate wie Linsen, Spalte, Prismen, Kameras und auch das Interferometer an Reitern befestigt, die längs gußeisernen optischen Bänken geradlinig verschoben und an jeder gewünschten Stelle unverrückbar festgeklemt werden können. Die optischen Bänke, Gitter und Hohlspiegel sind auf einem massiven Tisch montiert, welcher erschütterungsfrei in einem Laboratorium des Kellergeschosses aufgestellt ist. Die Lichtquellen befinden sich getrennt von dem optischen Aufbau auf besonderen Stativen, die auf dem Holzfußboden des Versuchsraumes stehen, während der Tisch mit der Apparatur auf dem Zementboden aufgestellt ist, der in einem Abstand von $\frac{1}{2}$ m unterhalb des Holzfußbodens vorhanden ist. Selbst bei Expositionen von mehrstündiger Dauer war nicht der geringste Einfluß einer Erschütterung an den Aufnahmen feststellbar.

1) Auch andere Verfahren wurden versucht.

Auf die Aufstellung des Etalons wurde ganz besondere Sorgfalt verwandt. Der von Eversheim konstruierte, von ihm zu seinen Wellenlängennormalenmessungen^{1), 2), 3), 4)} benutzte Interferenzapparat ist so zweckmäßig und gut, daß er unverändert benutzt wurde.

Als Distanzstücke im Interferometer dienen Ringe aus Invar bzw. Homogenquarz. Von Invarstücken habe ich zur Herstellung der Interferenzspektrogramme, welche den in dieser Arbeit mitgeteilten Versuchsergebnissen zugrunde liegen, nur einen 5 mm-Ring benutzt. Homogenquarzringe lieferte mir die Firma W. C. Heraeus-Hanau/Main nach meinen Angaben in unbearbeitetem Zustande. Das Schleifen derselben mit wäßerigem Schmirgelbrei und trockenem Pariserrot besorgte ich selbst, wobei die optische Kontrolle der letzten Korrekturen nach der Anleitung Meissners⁵⁾ durchgeführt wurde. Von solchen Quarzringen habe ich vorläufig drei in Benutzung; ihre Dicken betragen 2 mm, 7,5 mm und 11 mm.

Zur Erzeugung des Interferenzringsystems standen mir drei verschiedene Paare von Quarzplatten zur Verfügung; für die Anfertigung der zu den endgültigen Messungen verwandten Spektrogramme gebrauchte ich ausschließlich ein Paar planparalleler Zeiss-Quarzplatten, welche bei einem Durchmesser von 22 mm eine Dicke von 5 mm besitzen.

Als Metallbelag auf den Interferometerplatten diene chemisch niedergeschlagenes Silber. Ich habe meine bisherigen Messungen nur bis λ 3450 Å.-E. nach unten ausgedehnt, da bis hierhin der Reflexionskoeffizient meiner Versilberung groß genug war, um mit dem Kohle-Eisen-Pfundbogen und der Cadmiumvakuumbogenlampe als Lichtquellen noch Interferenzen von passender Schärfe liefern. In einer Abänderung des von Pfund⁶⁾ angegebenen Verfahrens habe ich gemeinsam mit A. Zwetsch eine Vorschrift gewonnen, welche es ermöglicht,

1) P. Eversheim, Zeitschr. f. wiss. Photogr. (5) 5. S. 152 bis 180. 1907.

2) Derselbe, Ann. d. Phys. 30. S. 815—839. 1909.

3) Derselbe, Ann. d. Phys. 36. S. 1071—1076.

4) Derselbe, Ann. d. Phys. 45. S. 454—456. 1914.

5) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. 51. S. 95—116. 1916.

6) A. H. Pfund, Astroph. Journ. 28. S. 197—211. 1908.

Glas- oder Quarzplatten mit einer festhaftenden, äußerst gleichmäßigen Silberschicht zu überziehen, die auch bei großer Durchlässigkeit vorzüglich reflektiert. Die mit Hilfe dieser Methode hergestellten Spiegel sind den auf dem Wege der Zerstäubung erzeugten mindestens gleichwertig; ich habe daher von der Verwendung kathodischer Versilberungen in diesem Wellenbereich abgesehen. Eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens ist von Zwetsch¹⁾ veröffentlicht worden. Für die Herstellung der Interferenzspektrogramme versilberte ich die Interferometerplatten so stark, daß von einem Glühfaden, der durch das zusammengesetzte, unter geringer Neigung gegen die zum Auge gelangenden Lichtstrahlen gehaltene Interferometer betrachtet wurde, nach erfolgten Polieren mit Pariserrot etwa 20—25 reflektierte Bilder sichtbar waren.

Da die photographische Aufnahme der zum Teil recht schwachen Eisenlinien mit dem Interferenzapparat in der 2. Ordnung des Gitters sowie auch der Neonlinien in der Gegend λ 7500 Å.-E. in 1. Ordnung selbst bei Verwendung einer so intensiven Lichtquelle wie die benutzte Type von Neonlampe, über die im nächsten Abschnitt Näheres gesagt werden soll, Expositionszeiten bis zu $2\frac{1}{2}$ Stunden erforderte, da ferner bei der eingeschlagenen Methode jede Aufnahme des Spektrums der zu untersuchenden Lichtquelle durch zwei Aufnahmen der roten Cadmiumlinie — eine vorher, die andere nachher — zu ergänzen ist, so muß jede Temperaturänderung am Etalon offenbar vermieden werden. Dies wurde erreicht, indem ich das Interferometer mit einem mehrfachen Schutzgehäuse aus Pappe und Metall umgab. Die am Etalon herrschende Temperatur läßt sich mittels eines $\frac{1}{10}^{\circ}$ -Thermometers, dessen Quecksilberkugel sich unmittelbar neben dem Distanzring des Interferometers befindet, fortgesetzt kontrollieren. Der an und für sich geringfügigen, unvermeidlichen Steigerung der Temperatur des Arbeitsraumes infolge des Betriebes der Lichtquellen wird in unmittelbarer Umgebung des Interferenzapparates durch die Verwendung des Schutzgehäuses so wirksam vorgebeugt, daß während einer Stunde die Etalontemperatur nur um $\frac{1}{10}^{\circ}\text{C}$ zunimmt, was ohne Einfluß auf die Dicke der Invar- oder Quarzringe bleibt.

1) A. Zwetsch, Zeitschr. f. Physik 19. S. 398. 1923.

3. Die Lichtquellen.

Die als Vergleichslinie dienende primäre Wellenlängen-normale Cd, λ 6438 Å.-E. lieferte die bereits genannte Quarz-Cadmiumvakuumbogenlampe. Sie wurde mit 220 Volt und 3,5—4 Amp. Gleichstrom betrieben. Die so erzeugten Cd-Linien sind hinreichend scharf.

Als Lichtquelle für das Neonspektrum diente mir bei meinen Messungen nicht das übliche, mit hochgespanntem Wechselstrom von relativ geringer Intensität gespeiste Geisslerrohr mit Kapillare, wie es von Priest¹⁾, Meissner²⁾, Burns, Meggers und Merril³⁾ benutzt wurde, sondern eine neue Type von Neonlampe, die mit Gleichstrom betrieben wird und wegen ihrer außerordentlichen Helligkeit, ihrer unbedingten Zuverlässigkeit im Betrieb, der Reinheit des von ihr emittierten Spektrums sowie der Schärfe und der Homogenität seiner Linien für interferenzspektroskopische Zwecke, speziell als Bezugsnormalenlichtquelle bei exakten Wellenlängenbestimmungen in gewissen Spektralbezirken, ganz vorzüglich geeignet ist.⁴⁾

Bei einer Potentialdifferenz von 110 Volt zwischen den Elektroden trägt die Lampe eine Gleichstrombelastung von einigen Ampere. Um ihre Lebensdauer möglichst zu verlängern, empfiehlt es sich allerdings, die Stromstärke nicht höher als 1,5 Amp. zu wählen; bei Dauerbetrieb soll sie 1 Amp. nicht überschreiten. Die Zündung wird durch einen Hochspannungsstoß bewirkt, den man über die 110 Volt Gleichstromspannung superponiert. Die Lampe bewährt sich ausgezeichnet. Ich brenne sie jetzt bereits mehrere hundert Stunden, ohne daß eine nennenswerte Einbuße an Intensität festzustellen ist. Für die Herstellung der Neonaufnahmen

1) Irwin G. Priest, Bull. Bur. Stand. 8. S. 539—544. 1912.

2) K. W. Meissner, Ann. d. Physik 51. S. 95—116. 1916.

3) K. Burns, W. F. Meggers u. P. W. Merril, Bull. Bur. Stand. 51. S. 765—775. 1918.

4) Diese Lampe wird von der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung in Berlin zu medizinischen Zwecken hergestellt. Die Direktion dieser Gesellschaft stellte mir in lebenswürdiger Weise mehrere verschiedene Formen dieser Lampe für meine Messungen zur Verfügung. Auch an dieser Stelle sei Herrn Dr. F. Skaupy, für das bereitwillige Eingehen auf meine Wünsche bezüglich meinen speziellen Zwecken angepaßter Abänderungen in der Form der Lampe, herzlichst gedankt.

werden die Blende Bl_1 und die Linse L_2 (vgl. Fig. 1) aus der Versuchsanordnung entfernt und die Neonlampe in ähnlicher Weise wie der Eisenbogen montiert.

Für die Gewinnung der Eisenaufnahmen ist im Einklang mit den Festsetzungen der letzten Kongresse zu Brüssel und Rom ausschließlich der Pfund-Eisenbogen benutzt worden. In welcher Weise dafür gesorgt ist, daß nur die zentrale Horizontalzone von $\frac{1}{4}$ mm-Breite dieses bei 12 mm Bogenlänge und 5 Amp. brennenden Eisenbogens als Lichtquelle wirksam ist, wurde schon in (2.) bei der Beschreibung der Apparatur dargestellt.

Als untere, mit dem positiven Pol der Batterie verbundene Elektrode benutzte ich einen Rundeisenstab von 12–13 mm Durchmesser, als oberen negativen Pol einen solchen von 6–7 mm Durchmesser (in Übereinstimmung mit den Festsetzungen des Committee on Standards of Wave-Lengths auf der letzten Tagung der Astromical Union zu Rom im Mai 1922).

Schon Pfund¹⁾ bemerkt, daß bei Verwendung von Kohle statt Eisen als negative Elektrode die nach ihm benannte Bogenlampentype Eisenlinien von großer Homogenität und Schärfe liefert, speziell im Ultraviolett. Sie stehen allerdings, besonders im sichtbaren Spektralgebiet, an Intensität den unter sonst gleichen Bedingungen mit negativem Eisenpol erzeugten nach. Bei Benutzung der Zentralzone des Bogens treten die Cyanbanden so schwach auf, daß sie bei eingeschaltetem Interferenzapparat photographisch nicht zur Wirkung kommen und daher keinerlei Komplikationen verursachen. Indem ich von den Resultaten der Untersuchungen von St. John und Babcock²⁾ über die Elimination des Poleffektes im Eisenbogen Gebrauch machte, konnte ich mit dem beschriebenen Bogen und bei einer Stromstärke von 3,5 Amp. bei einer Bogenlänge von 20–25 mm mit chemisch versilberten Interferometerplatten noch scharf ausgebildete Interferenzmaxima in den Linien bis zu λ 3450 Å.-E. erhalten, obwohl das Reflexionsvermögen chemisch niedergeschlagenen Silbers in dieser Gegend merklich abnimmt, während mit Eisen als negativem Pol unter

1) A. H. Pfund, *Astroph. Journ.* 27. S. 296–298. 1908.

2) Ch. E. St. John u. H. D. Babcock, *Astroph. Journ.* 46. S. 138–166. 1917.

den verschiedensten Aufnahmebedingungen keine für Meßzwecke brauchbare Aufnahme von dieser Spektralregion zu erzielen ist.

4. Photographisches.

Da die photographische Technik für die Gewinnung brauchbarer Resultate wesentlich ist, seien auch darüber Angaben gemacht. Im Bereich kürzerer Wellen (λ 3450— λ 4500 Å.-E.) bewährten sich neben gewöhnlichen Emulsionsplatten von Schleussner die photomechanischen Platten der Unger & Hoffmann A.-G., Dresden A. Die letzteren lieferten trotz ihrer relativ geringen Empfindlichkeit in Expositionszeiten von 2—10 Minuten in erster Ordnung, 10 Minuten bis $1\frac{3}{4}$ Stunde in der zweiten, von starken sowohl als auch von schwächeren Linien sehr kontrastreiche, glasklare Aufnahmen. Bei Verwendung der Bromsilber-Gelatineplatten von Schleussner genügte für Aufnahmen mit dem Eisen-Eisen-Pfundbogen in erster Ordnung eine Expositionszeit von 3 Sekunden bis 10 Minuten, in zweiter Ordnung von 1 Minute bis 1 Stunde. Aufnahmen mit dem Kohle-Eisen-Pfundbogen erforderten etwas längere Belichtungszeiten. Für Expositionen dieser Art habe ich auch mit Erfolg die Ultrarapidplatten von Hauff in Feuerbach (Württemberg) benutzt.

Zu Aufnahmen in der Spektralregion λ 4500— λ 5700 Å.-E. verwandte ich die orthochromatische Flavinplatte von Hauff, welche im grünen und gelben Teil des Spektrums eine hohe Empfindlichkeit bei geringer Korngröße besitzt und sehr kontrastreich arbeitet. Für die Herstellung der Spektrogramme in diesem Bezirk sah ich von der Benutzung eines Kohlepols im Pfundbogen ab, da dieser hier die Intensität allzusehr vermindert. In der ersten Ordnung schwankte die Belichtungszeit je nach der Helligkeit der zu photographierenden Linien zwischen 5 und 45 Minuten; in der zweiten bedurfte es zum Teil Expositionszeiten von 2— $2\frac{1}{4}$ Stunden, um einzelne der gewünschten Linien hinreichend kräftig zu erhalten. Diese verhältnismäßig langen Expositionszeiten haben in nicht geringem Maße ihren Grund darin, daß die neuerdings festgelegten Betriebsbedingungen für den Eisenbogen die Intensität dieser Lichtquelle nicht erst von λ 5650 Å.-E. an aufwärts,

wie St. John und Babcock¹⁾ bemerken, sondern bereits im grünen Bezirk gegenüber dem früheren internationalen 6 mm-6 Amp.-Bogen merklich schwächen.

Für die Herstellung der Cadmiumaufnahmen im Bereich λ 3466— λ 5086 Å.-E. bedurfte es in Anbetracht der enormen Helligkeit der benutzten Cadmiumvakuumbogenlampe wesentlich kürzerer Expositionszeiten. Die Linien λ 4662— λ 5086 Å.-E. wurden in erster Ordnung mit Flavinplatten in 1—2 Minuten erhalten, die Gegend λ 3466— λ 3612 Å.-E. in der zweiten Ordnung mit photomechanischen Platten in 2 Minuten.

Für die Aufnahmen der roten Cadmiumlinie und des Neonspektrums von λ 5800 Å.-E. an aufwärts sensibilisierte ich Ultrarapidplatten von Schleussner und ebensolche von Hauff teils mit Pinacyanolblau, teils mit Dicyanin nach den Vorschriften, welche Walters jr. und Davis angeben.²⁾ Die Aufnahmen der primären Normale Cd., λ 6438 Å.-E., erforderten nur 4—5 Minuten Expositionszeit.

Da diejenigen Linien im gelben und roten Teil des Neonspektrums, deren Intensität ihre interferenzspektroskopische Messung gestattet, in hinreichend großen Abständen voneinander liegen, konnte ich mich hier auf die Verwendung der ersten Ordnung des Gitters beschränken. Bei der Helligkeit des von der Neongleichstromlampe emittierten Spektrums genügten für dessen photographische Aufnahme in der Gegend λ 5800 bis λ 6800 Å.-E. Belichtungszeiten von 20—50 Minuten, im Bereich λ 6800— λ 7600 Å.-E. solche von 50—150 Minuten. Weiter in den Bezirk längerer Wellen hinein bin ich bei diesen ersten Bestimmungen nicht vorgedrungen. Es ist beabsichtigt, die Messungen auch ins Infrarot hinein fortzusetzen, wo die beträchtliche Intensität der zur Verfügung stehenden Neonlichtquelle erst recht zur Geltung kommen wird, wenn an Stelle des Gitters dann ein lichtstarker Prismenspektrograph als Dispersionsapparat benutzt wird; denn das Beugungsspektrum oberhalb λ 7600 Å.-E. erfordert mit eingeschaltetem Interferenzapparat selbst bei Verwendung dieser Gleichstrom-

1) Ch. E. St. John und H. D. Babcock, *Astroph. Journ.* 46. S. 157. 1917.

2) Francis M. Walters jr. und R. Davis, *Bull. Bur. Stand.* 15. S. 353—375. 1921.

lampe doch schon Expositionszeiten von einigen Stunden für die photographische Aufnahme. — Konzentrierter Hydrochinon-entwickler bewährte sich am besten.

5. Das Berechnungsverfahren.

Zur Ermittlung der Wellenlängenwerte benutzte ich die Relation:

$$(1) \quad \lambda_x = \frac{P_n \cdot \lambda_n}{P} \cdot \sqrt{\frac{4F^2 + d_n^2}{4F^2 + d_x^2}}.$$

In dieser beziehen sich die mit dem Index n versehenen Größen auf die den Messungen zugrunde gelegte Vergleichs-
linie, die den Zeiger x aufweisenden auf die zu bestimmende
Spektrallinie. λ_n und λ_x bezeichnen die Wellenlängen in inter-
nationalen Angström-Einheiten, d_n und d_x sind die in der
Brennebene des Achromaten A , d. h. auf dem Spektrographen-
spalt Sp (vgl. Fig. 1) gemessenen Durchmesser irgendeines
Interferenzringes der Bezugsnormale und der zu bestimmenden
Linie, P_n und P_x die zugehörigen Ordnungszahlen, F bedeutet
die Brennweite des Achromaten A . Abgesehen von einer un-
wesentlichen formalen Umgestaltung des Radikanden ist die
Berechnungsformel (1) die zuerst von Meissner¹⁾ benutzte,
Lord Rayleigh²⁾, Fabry und Buisson³⁾, Eversheim⁴⁾ ⁵⁾,
Pfund⁶⁾, sowie auch Burns, Meggers und Merrill⁷⁾ ⁸⁾ er-
setzen bei ihren Berechnungen die Quadratwurzel in Gl. (1)
durch einen Näherungswert, indem sie die in die Rechnung
eingehenden Kosinus der Inzidenzwinkel der die Ringe von
den Durchmessern d_n und d_x erzeugenden Strahlen in einer
Reihe entwickeln und unter der Voraussetzung, daß nur sehr
kleine Winkel, d. h. die innersten Ringe des Interferenzkurven-

1) K. W. Meissner, Ann. der Physik 51. S. 95—116. 1916.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6) 11. S. 685—703. 1906.

3) Ch. Fabry und H. Buisson, Astroph. Journ. 28. S. 169 bis 196. 1908.

4) P. Eversheim, Zeitschr. f. wiss. Photogr. (5) 5. S. 152 bis 180. 1907.

5) P. Eversheim, Ann. d. Physik 30. S. 815—839. 1909.

6) A. H. Pfund, Astroph. Journ. 28. S. 197—211. 1908.

7) K. Burns und W. F. Meggers, Bull. Bur. Stand. 12. S. 179 bis 197. 1915.

8) K. Burns, W. F. Meggers und P. W. Merrill, Bull. Bur. Stand. 13. Nr. 2. 1916.

systems, berücksichtigt werden sollen, die höheren Potenzen vernachlässigen. Auch die vereinfachte Methode der Auswertung des Negativmaterials, die auf dem Mount Wilson¹⁾ benutzt wird und die wohl weniger der Messung sekundärer als der interferometrischen Bestimmung tertiärer Normalen angepaßt ist, ist mit dieser Einschränkung behaftet. Die von mir benutzte Meissnersche Berechnungsformel ist davon gänzlich frei; sie erlaubt, auch die äußeren Ringe — soweit sie optisch fehlerfrei abgebildet sind — für die Messung heranzuziehen; sie erfordert nicht mehr Rechenarbeit als die an Stelle der Wurzel in Gl. (1) den Näherungsausdruck

$$\left[1 + \frac{d_n^2}{8F^2} - \frac{d_s^2}{8F^2} \right]$$

enthaltende, bei früheren Messungen benutzte Formel, und gestattet am ehesten, den an Messungen sekundärer Normalen gestellten Genauigkeitsforderungen so vollkommen wie möglich gerecht zu werden.

Bei der Berechnung der Wellenlängen nach Gl. (1) ist lediglich der Wurzelausdruck aus Messungsergebnissen direkt ermittelbar. Die Bestimmung von F für die benutzte Öffnung des Achromaten habe ich photographisch für verschiedene Wellenlängen nach dem Hartmannschen²⁾ Verfahren der extrafokalen Messungen durchgeführt. Sie ergab den Mittelwert $F = 250,42$ mm (18°). Da die Entfernung Achromat A — Spalt Sp (vgl. Fig. 1) nur bis auf eine Unsicherheit von $\pm 0,1$ mm in der Versuchsanordnung reguliert werden konnte, wurde die Einstellung der Spaltebene in die berechnete Brennweite so exakt wie möglich vorgenommen, und nachdem unter Zugrundelegung des für F berechneten Wertes für einige sehr scharfe und vorzüglich meßbare Neon- und Cadmiumlinien von hinreichend bekannter Wellenlänge die Ordnungszahlen bestimmt worden sind, der wirkliche Abstand der Spaltebene vom Achromaten auf Grund von Gl. (1) rechnerisch ermittelt, da es auf diesen gerade für die Berechnungen ankommt. Eine Unsicher-

1) Ch. E. St. John und H. D. Babcock, *Astroph. Journ.* 53. S. 260—299. 1921.

2) J. Hartmann, *Zeitschr. f. Instrumentenk.* 24. S. 33—47 und 97—117. 1904. Hierzu die bereits erwähnte, noch nicht publizierte Arbeit von Lauscher.

heit von einigen Tausendsteln der Ångström-Einheit in den Wellenlängenwerten fällt dabei nicht ins Gewicht, weil diese Zahlen nicht in die Rechnung eingehen. Aus den ausgezeichnet übereinstimmenden Werten von F , die sich nach der Formel:

$$(2) \quad F = \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{P^2 \cdot d^2 - \bar{P}^2 \cdot \bar{d}^2}{P^2 - \bar{P}^2}} \right] \lambda_x$$

[in dieser aus Gl. (1) durch einfache Umformungen erhaltenen Relation bedeuten d und \bar{d} die Durchmesser auf dem Spalt Sp , P und \bar{P} die Ordnungszahlen zweier Interferenzringe derselben Wellenlänge λ_x . Es ist $P = P - n$, wo $n = 1, 2, 3 \dots$ ist] für 4—5 Ringe einer Anzahl geeigneter Neon- und Cadmiumlinien ergaben, wurde das Mittel genommen und dessen Betrag $F = 250,478$ mm sämtlichen Anwendungen der Gl. (1) zugrundegelegt. Von Zeit zu Zeit wurde durch Wiederholung des Verfahrens bei verschiedenen Justierungen des Interferometers und verschiedenen Plattendistanzen der Brennweitenwert F kontrolliert. Es ergaben sich dabei nur Abweichungen von $\pm 0,005$ mm im Maximum für den Mittelwert, welche innerhalb der Meßgenauigkeitsgrenzen lagen und daher unberücksichtigt geblieben sind.

Bei der benutzten Methode von Fabry und Buisson¹⁾ werden die Durchmesser des zu einer bestimmten Wellenlänge gehörigen Interferenzringensystems nicht unmittelbar in der Spaltebene gemessen, sondern auf den Negativen, welche die Spektrographenkamera K_1 und die Hilfskamera K_2 liefern. Da der in der Versuchsanordnung benutzte Hohlspiegel H und das Konkavgitter G nicht dieselbe Brennweite haben, da ferner das Tessarobjektiv T den Spalt Sp nicht in seiner wahren Größe in K_2 abbildet, so ist der Durchmesser, den die Messung für einen speziellen, ins Auge gefaßten Ring von der vorerst noch unbekannten Ordnungszahl P in der Spektrallinie λ ergibt, nicht mit dem d der Gl. (1) identisch, sondern für die bei meiner Aufstellung gegebenen Verhältnisse etwa auf das Doppelte vergrößert. Diese Verzeichnung ist durch das ganze Spektrum hindurch nicht völlig konstant, sondern variiert, wenn auch nur um sehr kleine Beträge, mit der Wellenlänge.

1) H. Buisson und Ch. Fabry, Journ. de Physique, März 1906.

Der gemessene Durchmesser D ist daher auf seinen in die Gl. (1) eingehenden Wert d auf dem Spalt Sp zu reduzieren, und diese Reduktion erfordert die Bestimmung des Vergrößerungsfaktors $1:f$ des Spektralapparates für die betreffende Wellenlänge. Mit dem Reduktionsfaktor f ist dann das gemessene D zu multiplizieren, um die wahre Größe d des Ringdurchmessers, welche den Berechnungen zugrunde gelegt wird, zu erhalten. Die Ermittlung der Vergrößerungsfaktoren $1:f$ für die einzelnen Wellenlängen des in der Kamera K_1 photographierten Spektrums, sowie für die durch das Tessarobjektiv T in der Hilfskamera K_2 abgebildete rote Cadmiumlinie erfolgte durch den üblichen, von Fabry und Buisson stammenden Kunstgriff, über dessen praktische Anwendung in Kürze nur folgendes bemerkt sei.

In die eine Kante des Spektrographenspaltes Sp sind feine Marken eingekerbt, die mit den Ringsegmenten zugleich in jeder Spektrallinie abgebildet werden. Hat die Messung der wahren gegenseitigen Entfernung der Marken auf dem Spalt die Länge l_0 ergeben und ermittelt man in jeder Linie den Abstand l_x der Spaltmarkenbilder voneinander, so hat man in dem Quotienten $1:f_x = l_x:l_0$ den Vergrößerungsfaktor für die zu der betreffenden Wellenlänge gehörigen Ringdurchmesser und in dem Verhältnis $f_x = l_0:l_x$, sowie $f_n = l_0:l_n$ die Reduktionsfaktoren, mit denen die auf den Negativen gemessenen Durchmesser D_n und D_x zu multiplizieren sind, um die in die Berechnungsformel (1) eingehenden Werte d_n und d_x zu erhalten.

Um mittels der Gl. (1) auf Grund des zu einer Aufnahme-
serie gehörigen Zahlenmaterials die Wellenlängen der photographierten Linien bestimmen zu können, ist außer dem bekannten Radikanden noch die Kenntnis der Ordnungszahlen P_n und P_x der in die Wurzel eingehenden Ringe von Standard- und zu ermittelnder Linie erforderlich. Der exakte Wert von P_n läßt sich nach Lord Rayleigh¹⁾ finden, wenn man eine Anzahl Wellenlängen zur Verfügung hat, welche bereits genau, nach Möglichkeit bis auf wenige Tausendstel einer Ångström-Einheit, bekannt sind. Das Verfahren basiert auf der Tat-

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6) 11. S. 685—703. 1906.

sache, daß P_n und P_x in Gl. (1) ganze Zahlen sein müssen. Durch Zuhilfenahme einiger Linien von bekannter Wellenlänge aus den Spektren des Neons, des Cadmiums und des Quecksilbers (die Cadmiumlampe enthält Spuren von Quecksilber) konnte ich wegen der Genauigkeit, mit welcher die äußerst scharfen Linien des Vakuumbogens und des Edelgasspektrums die Quadratwurzel zu berechnen gestatten, für jeden Distanzring zwischen den Interferometerplatten und für jede Umjustierung des Interferometers die gesuchte Ordnungszahl P_n der Ringe der Standardlinie Cd, λ 6438 Å.-E. nach dem Rayleighschen Verfahren bestimmen. Bei bekanntem P_n gestattet dann Gl. (1), daß ganzzahlige P_x eines Ringes einer nur roh, d. i. aus Gittermessungen bis auf eine Unsicherheit von mehreren Hundertstel der Ångström-Einheit, bekannten Wellenlänge zu berechnen und mit dessen Hilfe die Wellenlänge bis auf wenige Tausendstel der Ångström-Einheit zu korrigieren.

6. Korrekturen.

Die Wellenlängenwerte, welche man nach Gl. (1) durch direkten Vergleich der zu messenden Linien mit der roten Cadmiumlinie Cd, λ 6438, 4696 Å.-E. (bei 760 mm Druck, 15° C. und trockener Luft) erhält, sind noch in zweifacher Hinsicht korrekturbedürftig. Sie erfordern eine Berichtigung:

1. wegen des sogenannten Phasensprunges,
2. wegen der Dispersion der Luft.

1. Der Phasensprung, d. i. die Verschiebung in der Phase, die ein Lichtwellenzug erleidet, wenn er an Metalloberflächen reflektiert wird, äußert sich praktisch darin, daß die nach Gl. (1) für sehr scharfe Linien von genau bekannter Wellenlänge unter Zugrundelegung einer ganzen Zahl für P_n sich berechnenden P_x keineswegs auch ganzzahlig werden, sondern um kleine Beträge nach oben oder unten von einer ganzen Zahl abweichen, und zwar für Linien verschiedener Spektralgebieten um verschieden große Werte. Je nach der Art der Erzeugung und der Dicke der Metallschicht auf den benutzten Interferometerplatten kann der Phasensprung unter Umständen, vor allem in Spektralgebieten, welche nicht in der Nähe der Standardlinie liegen, die berechneten Wellenlängen um mehrere Tausendstel der Ångström-Einheit ändern. Bei der Bestim-

mung sekundärer Wellenlängennormalen tritt daher zu der eigentlichen interferometrischen Messung der Wellenlänge noch die nicht minder wichtige Aufgabe hinzu, den optischen Dickenunterschied der reflektierenden Interferometerplattenbeläge für die Standardlinie und irgendeine andere Wellenlänge zu messen und die Abhängigkeit desselben von der Wellenlänge für das ganze Spektrum tabellarisch oder graphisch festzulegen, so daß es an Hand dieses funktionalen Zusammenhanges möglich wird, den durch den Phasensprung bedingten Fehler zu korrigieren.

Bei der Ermittlung einer Phasensprungkorrektionskurve für die zu meinen Wellenlängenmessungen benutzte Versilberung der Interferometerplatten entschied ich mich für das von Meggers¹⁾ beschriebene und an Hand einiger Wellenlängenbestimmungen im Neonspektrum illustrierte Verfahren von Burns²⁾, welches Etalons verschiedener Dicke benutzt und deshalb besonders beachtenswert ist, weil es im Gegensatz zu allen übrigen Methoden zur Phasensprungelimination den Vorteil gewährt, nicht wie diese die Korrektion für die Ordnungszahlen der verschiedenen Spektrallinien oder die Änderung der optischen Dicke der versilberten Luftschicht als Funktion der Wellenlänge zu ermitteln, sondern direkt den Betrag zu liefern, um welchen die ohne Berücksichtigung der Phasenverschiebung bei Benutzung eines bestimmten Interferometerplattenabstandes berechneten Wellenlängenwerte von Punkt zu Punkt im Spektrum berichtigt werden müssen. Das Verfahren beruht auf folgendem.

Vergleicht man auf interferometrischem Wege eine gewisse Wellenlänge λ_x ungeachtet der Phasenverschiebung, also beispielsweise nach Gl. (1) in Abschnitt 5., mit einer genau bekannten Bezugsnormale λ_n , etwa mit Cd, λ 6438 Å.-E., wie es bei meinen Messungen ausnahmslos geschehen ist, so bewirkt der Phasensprung, daß der rohe Wert λ_{e_1} , der sich für einen möglichst kleinen Abstand e , der Interferometerplatten ergibt, von dem ebenfalls unkorrigierten λ_{e_1} , den man auf dieselbe Weise unter Benutzung einer relativ großen Plattendistanz e_2 erhält, im allgemeinen verschieden ist. Die Differenz $\lambda_{e_2} - \lambda_{e_1} = c$ hängt sowohl von der spezifischen Natur der

1) W. F. Meggers, Bull. Bur. Stand. 12. S. 198—205. 1915.

2) K. Burns, Journ. de Phys. (5) 3. S. 457. 1913.

reflektierenden Metallschicht im Interferometer, als auch von der Lage der ins Auge gefaßten Linie im Spektrum ab. Ihr absoluter Betrag ist desto größer, je größer e_2 und je kleiner e_1 ist. Setzt man für die Vergleichsnormale λ_n den Einfluß der Phasenänderung gleich Null, und bedeuten die exakten Werte e_1 und e_2 die jeweiligen optischen Dicken der versilberten Luftschicht lediglich für Licht von der Wellenlänge λ_n , so zeigt Meggers a. a. O., daß der wahre, vom Phasensprung unabhängige Wellenlängenwert λ sich von dem rohen, mittels der Plattendistanz e_2 bestimmten λ_{e_2} um einen Betrag $\delta \lambda_{e_2}$ unterscheidet, welcher der Differenz $c = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ direkt proportional ist und sich berechnet zu

$$(3) \quad \delta \lambda_{e_2} = \frac{e_1}{e_2 - e_1} \cdot c.$$

Ergibt die Bestimmung von λ mittels irgendeines anderen Interferometerplattenabstandes e den rohen Wert $\lambda_{\bar{e}}$, so erhält man die an diesem anzubringende Phasensprungkorrektur $\delta \lambda_{\bar{e}}$ bei bereits bekanntem $\delta \lambda_{e_2}$ aus der Proportion:

$$\delta \lambda_{\bar{e}} : \delta \lambda_{e_2} = e_2 : e,$$

aus welcher in Verbindung mit Gl. (3) folgt:

$$(4) \quad \delta \lambda_{\bar{e}} = \frac{e_2}{e} \cdot \frac{e_1}{e_2 - e_1} \cdot c.$$

Die Gl. (3) und (4) zeichnen einerseits den Weg vor, den man bei der praktischen Anwendung dieses Verfahrens einzuschlagen hat, andererseits ersieht man aus Gl. (3) auch ohne weiteres, welche Vorsichtsmaßregeln zu beachten sind, wenn man brauchbare Resultate erzielen will.

Von entscheidender Bedeutung für die Brauchbarkeit der Methode ist die Genauigkeit, mit welcher die Differenz

$$c = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$$

bestimmt werden kann. Ohne Berücksichtigung der Phasenverschiebung ist eine größere Meßgenauigkeit als $\pm 0,001 \text{ \AA.-E.}$ im Durchschnitt bei der Ermittlung von λ_{e_2} bzw. λ_{e_1} wohl kaum zu erwarten, so daß der maximale Fehler von $c \pm 0,002 \text{ \AA.-E.}$ beträgt. Ein solcher Fehler fälscht das Resultat um so weniger, je größer $|c|$ ist. Wie bereits gesagt ist, fällt $|c|$ desto größer aus, je kleiner e_1 und je größer e_2 ist. Da man jedoch aus praktischen Gründen mit e_1 oberhalb einer gewissen

unteren Grenze bleiben muß, wird $|c|$ und damit die bei der Bestimmung dieser Differenz erzielte Genauigkeit desto größer, je größer der Plattenabstand e_2 gewählt werden kann. In praxi empfiehlt sich daher für die Bestimmung der Phasenkorrektur nach diesem Verfahren die Verwendung einer Lichtquelle, welche möglichst homogene und dabei doch intensive Linien emittiert, so daß noch bei sehr hohen Gangunterschieden scharfe Interferenzen erhalten werden — wie dies z. B. von den Wellenlängen des Neons und des Cadmiumvakuumbogens gesagt werden kann —, sowie die Kombination eines kleinen Plattenabstandes e_1 mit einem möglichst großen e_2 . Aus Gl. (3) ersieht man ohne weiteres, daß für eine vorgegebene Kombination (e_1, e_2) der maximale Fehler in der Bestimmung der Korrektur $\delta \lambda_{e_2}$ das $\frac{e_1}{e_2 - e_1}$ -fache des größten Fehlers beträgt, der c anhaftet, und daß man es daher in der Hand hat, den ersteren praktisch dadurch unschädlich zu machen, daß man den Quotienten $\frac{e_1}{e_2 - e_1}$ genügend klein werden läßt, was durch eine geeignete Kombination (e_1, e_2) leicht bewerkstelligt werden kann.

Wie schon bemerkt, weisen die Gl. (3) und (4) den Weg für die praktische Durchführung dieser Methode. Auch die numerische Berechnung gestaltet sich außerordentlich einfach und bequem. Hat man die rohen Wellenlängen λ_{e_1} und λ_{e_2} einer Anzahl geeigneter, hinreichend nahe beieinander gelegener Spektrallinien mittels einer relativ dünnen versilberten Luftschicht e_1 und eines möglichst großen Plattenabstandes e_2 nach Gl. (3) ermittelt, so daß also die Größe $c = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ für die ihnen entsprechenden Punkte des Spektrums bekannt ist, so hat man diese nur mit dem konstanten Quotienten $\frac{e_1}{e_2 - e_1}$, in dessen Zähler und Nenner die Abrundung auf Zehntel des mm mit Rücksicht auf die Größenordnungen von c , $\frac{e_1}{e_2 - e_1}$ und $\delta \lambda_{e_2}$ ohne weiteres erlaubt ist, zu multiplizieren, um direkt die Phasensprungkorrektur $\delta \lambda_{e_2}$ zu bekommen, welche den rohen Wellenlängen λ_{e_2} additiv hinzuzufügen ist, um ihre exakten Werte zu erhalten. Zu dieser Rechnung reicht ein Rechenschieber vollständig aus; die Größenordnung ergibt eine

kurze Übersichtsrechnung, so daß man über diese nicht im Zweifel sein kann. Stellt man dann die Abhängigkeit

$$\delta \lambda_{e_2} = e_2(\lambda)$$

für diese ausgewählten Linien graphisch dar und legt durch die Ordinatenendpunkte einen Kurvenzug, so liefert dieser eine zu der betreffenden Versilberung und zum Distanzring e_2 gehörige Phasensprungkorrektionskurve, aus welcher für jede Linie des untersuchten Spektralbereiches, deren rohe Wellenlänge λ_{e_2} mittels dieser Versilberung und der Plattendistanz e_2 gemessen worden ist, der Betrag $\delta \lambda_{e_2}$ entnommen werden kann, der zu λ_{e_2} zu addieren ist, um den Einfluß der Phasenverschiebung zu kompensieren. Die zu irgendeiner anderen Plattendistanz \bar{e} gehörige, derselben Silberschicht entsprechende Korrektionskurve $\delta \lambda_{\bar{e}} = \bar{e}(\lambda)$ ergibt sich aus der graphischen Darstellung der bereits bekannten Abhängigkeit $\delta \lambda_{e_2} = e_2(\lambda)$ dann zufolge Gl. (4) einfach dadurch, das man die Ordinaten dieser Kurve im Verhältnis $\bar{e} : e_2$ verkleinert bzw. vergrößert.

Bei der Ermittlung der Korrektionskurve $\delta \lambda_{e_2} = e_2(\lambda)$ für meine Normalenmessungen entschied ich mich auf Grund eingehender Versuche und zahlreicher vergleichender Messungen zur Verwendung zweier Distanzringe von den Dicken

$$e_2 = 11 \text{ mm} \quad \text{und} \quad e_1 = 2 \text{ mm}.$$

Ich legte Wert darauf, die Korrekturen $\delta \lambda_{e_2}$ nicht nur für intensive Cadmium-, Quecksilber- und Neonlinien zu bestimmen, sondern auch für eine Anzahl stabiler, mit dem Pfundbogen scharfe Interferenzen liefernder Eisenlinien, um nicht bei der Konstruktion der Korrektionskurve Intervalle von 500 Å.-E. und mehr überbrücken zu müssen und damit deren Verlauf innerhalb einzelner Spektralbezirke fraglich zu gestalten. Für sämtliche zur Kurvenkonstruktion benutzten Wellenlängen übersteigt der wahrscheinliche Fehler des Mittelwertes aus den Einzelmessungen der rohen Werte λ_{e_1} und λ_{e_2} nicht $\pm 0,0004$ Å.-E.; sie können bis auf $\pm 0,001$ Å.-E. als sicher gelten.

Zur Ermittlung der λ_{e_1} und λ_{e_2} wurden eine Reihe von Spektrogrammen des Neons, des Cadmiums, des Quecksilbers und des Eisens in Verbindung mit den zugehörigen Aufnahmen der primären Wellenlängennormale bei den Distanzen

$$e_2 = 11 \text{ mm} \quad \text{und} \quad e_1 = 2 \text{ mm}$$

unter veränderten Bedingungen, speziell für verschiedene Justierungen des Interferometers, hergestellt. In Abständen von etwa 200 Å.-E. voneinander wurden im Spektralbezirk λ 3450 Å.-E. bis λ 7550 Å.-E. intensive, homogene Linien der genannten Elemente, welche bei den benutzten Plattendistanzen exakt meßbare Interferenzfransen liefern, ausgewählt, Ringdurchmesser der verschiedensten Größe mit solchen der roten Cadmiumlinie für dasselbe e zur Berechnung der Quadratwurzel in Gl. (1) (Abschnitt 5) kombiniert und aus dieser in Verbindung mit den zugehörigen Ordnungszahlen P_n und P_x $[\lambda_{e_2}]_x$ bzw. $[\lambda_{e_1}]_x$ nach Gl. (3) bestimmt. Die endgültig angenommenen Werte dieser unkorrigierten Wellenlängen λ_{e_1} und λ_{e_2} stellten für jede der Korrektionslinien λ_x das Mittel aus neun gut übereinstimmenden Einzelergebnissen dar, die sich auf drei unter variierten Versuchsbedingungen aufgenommene Negative verteilen. Wie bereits gesagt ist, beträgt die Meßgenauigkeit für sie durchweg $\pm 0,001$ Å.-E. Die einander zugeordneten $[\lambda_{e_1}]_x$ und $[\lambda_{e_2}]_x$ wurden dann zur Differenz

$$c_x = [\lambda_{e_2}]_x - [\lambda_{e_1}]_x$$

vereinigt, und diese lieferte dann gemäß Gl. (3) durch Multiplikation mit $\frac{e_1}{e_2 - e_1} = 0,22$ die jeweilige Korrektion $[\delta \lambda_{e_2}]_x$ zufolge einer durchgeführten Fehlerabschätzung bis auf einen maximalen Fehler von weniger als $\pm 0,0005$ Å.-E.

Sowohl die Werte für c_x , als auch diejenigen für $[\delta \lambda_{e_2}]_x$ wurden als Funktionen der Wellenlänge λ_x in ein Koordinatensystem eingetragen und aus ihnen eine c_x - bzw. $[\delta \lambda_{e_2}]_x$ -Korrektionskurve konstruiert. Für die auf chemischem Wege hergestellte Silberschicht, die ich zur Herstellung sämtlicher Aufnahmen, auf Grund deren die in den Tabellen 1—3 des Abschnitts 7 angegebenen Wellenlängen bestimmt worden sind, benutzte, gibt Fig. 2 den Verlauf der zur Plattendistanz $e_2 = 11$ mm gehörigen Korrektionskurve in dem Spektralgebiet, über welches sich meine Messungen erstrecken, bezogen auf die primäre Vergleichsnormale Cd, λ 6438 Å.-E., für welche die Phasenverschiebung und damit auch die Größen

$$[c_x]_n = [\lambda_{e_2}]_n - [\lambda_{e_1}]_n,$$

sowie $[\delta \lambda_{e_2}]_n$ als Null angenommen sind.

Eine gemäß Gl. (4) durch Multiplikation der Ordinaten $\delta\lambda_{e_2}$ mit dem Faktor $\frac{e_2}{\bar{e}} = 2,02$ gewonnene Kurve lieferte noch die Phasensprungkorrekturen $\delta\lambda_{\bar{e}}$ für die rohen Wellenlängen $\lambda_{\bar{e}}$, die sich in entsprechender Weise wie die λ_{e_1} und λ_{e_2} durch Verwendung eines dritten Plattenabstandes $\bar{e} = 5,3$ mm ergaben, den ich ebenfalls zu meinen Messungen benutzt habe.

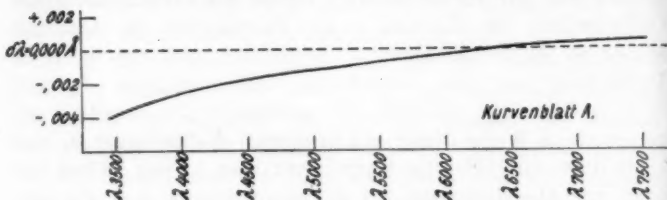


Fig. 2. Phasensprungkorrektur für das 11 mm-Etalon.

Auf Grund der aus den Gl. (3) und (4) leicht herzuleitenden Relation

$$(5) \quad \delta\lambda_{e_1} = c + \delta\lambda_{e_2}$$

erhielt ich durch Summation der Ordinaten von $[\delta\lambda_{e_2}]$ und $c(x)$ ohne weiteres auch die Phasensprungkorrektionskurve für den Plattenabstand e_1 , so daß auch unberichtigte Wellenlängen $[\lambda_{e_1}]_x$, welche mittels des kleineren 2 mm-Etalons innerhalb des bearbeiteten Spektralgebietes gemessen worden sind, wenn es wünschenswert war, an Hand dieser Kurve hinsichtlich der Phasenverschiebung korrigiert und zur Bestimmung des wahren Wellenlängenwertes benutzt werden konnten.

Die Maßstäbe für die Ordinaten und die Abszissen sind in Fig. 2 gegenüber denjenigen auf den tatsächlich zur Ermittlung der Korrektionsgrößen $\delta\lambda$ benutzten Kurvenblättern auf den vierten Teil verkürzt. Aus den Originalzeichnungen können die Zehntausendstel der Ångström-Einheit für die $\delta\lambda$ genau abgelesen werden.

Die Polygonzüge, welche sich durch geradlinige Verbindung sämtlicher ermittelter $\delta\lambda_{e_2}$ bzw. c -Werte im $(\lambda, \delta\lambda_{e_2})$ - bzw. (λ, c) -Koordinatensystem ergaben, stiegen — eine einzige kurze Strecke ausgenommen — insgesamt von längeren zu kürzeren Wellen hin an. Sie wurden unter Abrundung vereinzelter Ausnahmestellen durch Ausgleichkurven ersetzt, deren Ordinaten

an den Abrundungsstellen mit den wirklich ermittelten c - bzw. $\delta\lambda_e$ -Werten nur Differenzen bildeten, deren Absolutbeträge noch innerhalb der Fehlergrenzen lagen, welche der Berechnung von c bzw. $\delta\lambda_e$ gezogen sind.

Wie man aus Fig. 2 ersieht, ist der Einfluß der Phasenverschiebung bei der von mir benutzten chemischen Versilberung durchaus nicht zu vernachlässigen. Im langwelligen Spektralbezirk ist er zwar für das 11 mm-Etalon gering, dagegen ruft die Phasenänderung selbst bei dieser vergleichsweise großen Plattendistanz im Bereich kürzerer Wellen noch eine scheinbare Vergrößerung der Wellenlänge um 0,004 Å.-E. hervor. Eine eingehende Untersuchung dieser Fehlerquelle nach einer brauchbaren Methode ist daher für die Erzielung einwandfreier Resultate bei dieser Art von Messungen unerlässlich und ihre Elimination auf Grund zuverlässigen Zahlenmaterials ebenso wichtig wie die Bestimmung der Wellenlängen selbst.

2. Außer der Reduktion aller Wellenlängen auf gleiche Phase bei der Reflexion an der Silberschicht erfordern die nach Gl. (1) des Abschnitts 5 bestimmten rohen Wellenlängewerte noch eine Korrektur wegen der Dispersion der Luft. Zufolge den Beschlüssen der früheren Internationalen Union sollen als Wellenlängen gemessener Linien die Zahlenwerte für trockene Luft von 15° C bei dem Normaldruck von 760 mm Quecksilbersäule angegeben werden, da auch dem absoluten Wert $\lambda = 6438,4696$ Å.-E. für die exakte Wellenlänge der primären Bezugsnormale diese Bedingungen zugrunde gelegt sind, und Variationen im Zustand der Luft die den angeführten „Normalbedingungen“ entsprechenden „absoluten“ Wellenlängewerte, wenn auch nur um geringe Beträge, abändern. Bei exakten Wellenlängenbestimmungen, besonders bei der Präzisionsmessung sekundärer Normalen, muß diesem auf die Dispersion der Luft zurückzuführenden Effekt Rechnung getragen werden.

Ist zur Zeit der Herstellung des photographischen Negativmaterials, auf welchem derartige Bestimmungen basieren, der Zustand der Atmosphäre durch eine andere Temperatur als 15° C und durch einen von 760 mm Hg-Säule verschiedenen Druck charakterisiert, so bewirkt die geänderte Dichte der Luft wegen der Dispersion der letzteren eine Änderung der absoluten, d. h. trockener Luft von 15° C und 760 mm Druck

entsprechenden Wellenlängenwerte. Infolgedessen bedürfen die unter anderen als Normalbedingungen erhaltenen Zahlen für die Wellenlängen einer — zwar durchweg geringen und unter Umständen ganz zu vernachlässigenden — Korrektur, um sie auf ihre absoluten Werte zu reduzieren. Die bereits von Fabry und Buisson¹⁾ entwickelte Korrektionsformel lautet:

$$(6) \quad \Delta\lambda = \lambda_0 \left[n_0^{15} - \bar{n}_{760}^{15} \right] \cdot \frac{M_p^t - M_{760}^{15}}{M_{760}^{15}}.$$

Hierin bedeuten:

- $\Delta\lambda$ die Korrektur, welche einem durch den Druck p und die Temperatur t definierten Zustand der Atmosphäre entsprechenden Wellenlängenwert λ_p^t zugefügt werden muß, um diese ermittelte Größe auf den Absolutwert zu reduzieren, den dieselbe Wellenlänge unter Normalbedingungen haben würde;
- λ_0 diesen absoluten, zu Normalbedingungen gehörigen Wert von λ_p^t ;
- n_0^{15} den zu Normalbedingungen gehörigen Brechungsindex der Luft für die Wellenlänge λ_0 ;
- \bar{n}_{760}^{15} den absoluten Brechungsexponenten der Luft für die primäre Wellenlängennormale Cd., λ 6438, 4696 Å.-E.;
- M_p^t die Dichte der Luft unter den Aufnahmebedingungen von t° C und p mm Druck;
- M_{760}^{15} die Dichte der Luft unter Normalbedingungen.

Diese Korrektionsformel berücksichtigt nicht einen etwaigen Einfluß des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft auf den Brechungsexponenten. Messungen über die Dispersion des Wasserdampfes existieren bislang nicht²⁾; es besteht jedoch kein Grund zu der Annahme, daß sie von anderer Art sei als die der Luft. Unter dieser berechtigten Voraussetzung kann aber bei der Korrektur von Wellenlängen wegen der Dispersion der Luft von einer Berücksichtigung des Feuchtigkeitsgehaltes derselben solange es sich um Relativmessungen handelt, zu denen ja

1) Ch. Fabry u. H. Buisson, *Astroph. Journ.* 28. S. 169 bis 196. 1908.

2) Eine Messung derselben ist im hiesigen Institut im Gange.

auch die Bestimmung sekundärer Normalen gehört, gänzlich abgesehen werden, da in die Korrektonsformel (6) lediglich die Differenz der Brechungsindizes $n_{0760}^{15} - \bar{n}_{760}^{15}$ eingeht, auf welche ein mehr oder weniger beträchtlicher Gehalt der Luft an Wasserdampf ohne Einfluß ist.

Der Dichtefaktor $\frac{M_p^t - M_{760}^{15}}{M_{760}^{15}}$ in Gl. (6) ist für sämtliche

Linien eines Negativs konstant und läßt sich leicht als Funktion von Temperatur und Druck der Luft ermitteln; den Faktor $\lambda_0 [n_{0760}^{15} - \bar{n}_{760}^{15}]$ kann man als Funktion der Wellenlänge graphisch darstellen und an Hand dieser Korrektskurve durch Multiplikation der entnommenen Ordinaten mit dem zugehörigen Dichtefaktor die irgendeiner Wellenlänge entsprechende Korrektur bestimmen.

Bei meinen Messungen wurde mir die Ermittlung dieses Korrekturbetrages wesentlich erleichtert durch die ausführliche Tabelle von Meggers und Peters.¹⁾ Eine Hilfstabelle liefert

den Dichtefaktor $\frac{M_p^t - M_{760}^{15}}{M_{760}^{15}}$ als Funktion der Temperatur

und des Drucks für den Druckbereich von 600—780 mm Hg-Säule und das Temperaturintervall von 9—35° C. Die Haupttabelle gibt unmittelbar die Korrektur $\Delta\lambda$ der Gl. (6) für verschiedene Werte des Dichtefaktors und den Wellenlängenbereich λ 2000 bis λ 10000 Å.-E. Um hiermit die Größe $\Delta\lambda$ zu erhalten, welche wegen der Dispersion der Luft den Wellenlängen $[\lambda_p^t]_x$ eines beim Druck p und bei der Temperatur t hergestellten Negativs additiv hinzuzufügen war, bedurfte es zweimaliger Interpolation. Die erste, zwischen den p und t am nächsten gelegenen Werten der Hilfstabelle vorgenommen, lieferte den Dichtefaktor für alle Linien dieses Spektogramms;

die zweite, zwischen den diesem Faktor $\frac{M_p^t - M_{760}^{15}}{M_{760}^{15}}$ am nächsten

gelegenen Dichtefaktoren und den jedem $[\lambda_p^t]_x$ benachbarten Wellenlängen in der Haupttabelle durchgeführt, unmittelbar den gesuchten Betrag $[\Delta\lambda]_x$ in Zehntausendsteln der Ångström-Einheit.

1) W. F. Meggers u. C. G. Peters, Bull. Bur. Stand. 14. S. 697 bis 740. 1918.

Bei der Herstellung der zu meinen Messungen benutzten Negative bewegten sich Luftdruck und Temperatur innerhalb der Grenzen 755—775 mm und 14—19° C, was einem Extremwert für die Korrektion von etwa 0,0007 Å.-E. in der Gegend λ 3450 Å.-E. entspricht. Je nach Druck, Temperatur und photographiertem Spektralgebiet hielt sich die Korrektion in den meisten Fällen in viel engeren Grenzen. Ihr absoluter Betrag überstieg nur in wenigen Ausnahmefällen 0,0004 Å.-E. Sie ist bei sämtlichen Messungen berücksichtigt worden, der Vollständigkeit halber auch dann, wenn ihr Wert so gering war, daß er, mit Rücksicht auf die bei der Ermittlung der rohen Wellenlänge und der Phasensprungkorrektion erzielte Meßgenauigkeit, hätte vernachlässigt werden dürfen. Als Aufnahmetemperatur t wurde hierbei das Mittel aus den Angaben in Rechnung gesetzt, welche für jedes Aufnahmetripel das Etalonthermometer zu Beginn der ersten und am Ende der zweiten Ergänzungsaufnahme der roten Cadmiumlinie lieferte.

7. Messung, Zahlenmaterial und Tabellen.

Die numerische Auswertung der Gleichungen (1) und (2) in Abschnitt 5 gestaltet sich am einfachsten auf logarithmischem Wege. Die vierte Dezimale der Ångström-Einheit kann dabei noch mit Sicherheit erhalten werden, wenn man Tafeln mit achtestelligen Mantissen benutzt. Ich bediente mich bei meinen Rechnungen der „Logarithmisch-Trigonometrischen Tafeln mit acht Dezimalstellen“ von Bauschinger und Peters, Leipzig, 1910.

Die wahre Spaltmarkendistanz l_0 wurde mit dem Zeiss-Komparator durch häufige Messungen zu 2,891 mm bestimmt. Zur Messung der Ringdurchmesser D_n und D_x sowie der Spaltmarkendistanzen l_n und l_x auf den Negativen wurde ein Kreuzkomparator von Gustav Heyde, Dresden mit 0,1 mm-Okularmikrometer benutzt. Eine zwei- bis dreifache Vergrößerung seiner Mikroskope erwies sich als die günstigste. Bei einiger Übung ließen sich die halben Hundertstel des Millimeters mit Sicherheit ablesen.

Wie bereits in Abschnitt 5 gesagt wurde, war der Reduktionsfaktor $f_x = \frac{l_0}{l_x}$ bei meiner Aufstellung nicht für alle Wellenlängen λ_x eines Negativs konstant. Die l_x waren, in der

Plattenmitte gemessen, durch das ganze Spektrum hindurch, variabel. Die Abhängigkeit $l_z = f(\lambda_z)$ zeigte, graphisch dargestellt, einen nahezu linearen, von kürzeren nach längeren λ hin ansteigenden Verlauf innerhalb des Spektrums ein und derselben Ordnung. Für dieselbe Wellenlänge λ_z waren die in erster und zweiter Ordnung in der Plattenmitte gemessenen l_z ebenfalls um einen fast konstanten, geringen Betrag voneinander verschieden.

Bei der Messung wurde auf jedes Ringsegment und jede Spaltmarke achtmal eingestellt, je zweimal mit gewechselter horizontaler und vertikaler Meßrichtung unter Benutzung verschiedener Intervalle der Schrauben und Maßstäbe, und der Mittelwert aus den so bestimmten Ringdurchmessern und Spaltmarkendistanzen der Rechnung zugrunde gelegt, so daß etwaige geringfügige dem Meßinstrument anhaftende, ebenso wie gewisse persönliche Fehler als eliminiert gelten konnten. Die Ringe ließen sich, nicht nur bei den scharfen Neon- und Cadmiumlinien, sondern auch bei den meisten mit dem Pfundbogen erzeugten Eisenlinien, mit einer derartigen Genauigkeit messen, daß bei einem mittleren Durchmesser von 12 mm die zweite Dezimale als absolut sicher zu betrachten war. Diese Genauigkeit langt vollkommen, um die Tausendstel der Ångström-Einheit mit Sicherheit zu berechnen.

Der endgültig angenommene Wellenlängenwert stellt für jede gemessene Linie das Mittel aus neun Einzelergebnissen dar, zu deren Gewinnung drei verschiedene Aufnahmen — jede in Verbindung mit den zugehörigen Ergänzungsspektrogrammen der primären Vergleichsnormale — dienten, bei welchen dann drei von den fünf innersten Ringen in beliebiger Weise mit solchen der roten Cadmiumlinie kombiniert wurden. Als Ringdurchmesser D_n der Vergleichsnormale wurde stets das Mittel aus den Messungsergebnissen der beiden zu jedem Negativ gehörigen Ergänzungsaufnahmen in Rechnung gesetzt. Die Abweichungen in den beiden für ein und denselben Durchmesser D_n auf diese Weise erhaltenen Werten lagen durchweg innerhalb der Grenzen der Meßgenauigkeit.

Die in den folgenden Tab. 1—3 mitgeteilten endgültigen Zahlen wurden auf Grund von insgesamt 45 Aufnahmen, deren jede in Verbindung mit den zugehörigen Negativen der roten

Tabelle 1.
Wellenlängen im Eisenspektrum.

Intensität i.	Wallerath λ Å.-E.	Wahrscheinl. Fehler der Messung Å.-E.	Vorgeschl. Normale λ Å.-E.	Differenz W. V.N. λ Å.-E.	St. John u. Babcock λ Å.-E.	Differenz W.-John u. Babcock λ Å.-E.	Burns, Meg- gers u. Merrill λ Å.-E.	Differenz W. Burns, Meg- gers u. Merrill λ Å.-E.	Intensität i.
a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	h.	i.	a.
4	3558,520	$\pm 0,0003$	520	0,000	518	+0,002	519	+0,001	10
4	3576,760	6	761	-	1 759 G.	+	1 762	-	7
4	4074,794	4	793	+	1 796 G.	-	2 792	+	8
3	4095,975	5	978	-	3 975	0	977	-	5
5	4107,494	2	495	-	1 494	0	494	0	5
4	4156,805	3	806	-	1 804	+	1 804	+	7
5	4175,642	2	642	0	642	0	642	0	8
4	4184,896	5	896	0	896	0	894	+	9
4	4203,989	5	988	+	1 990	-	1 989	0	6
5	4219,365	6	366	-	1 367	-	2 364	+	5
3	4245,262	7	261	+	1 261	+	1 261	+	7
3	4710,288	3	288	0	288	0	288	0	5
3	4733,598	4	598	0	598	0	597	+	8
2	4741,534	5	535	-	1 535	-	1 -	-	7
2	4772,818	4	818	0	819	-	1 820	-	10
2	4924,777	7	776	+	1 775	+	2 777	0	9
3	4939,692	6	691	+	1 692	0	691	+	7
3	4994,136	4	135	+	1 136	0	133	+	8
5	5041,760	8	760	0	760	0	759	+	9
4	5123,726	5	725	+	1 725	+	1 724	+	4
5	5150,844	4	845	-	1 844	0	844	0	7
3	5198,714	4	715	-	1 718	+	1 716	-	3
5	5202,341	2	340	+	1 341	0	-	-	8
4	5216,280	2	280	0	280	0	280	0	3
4	5242,496	4	495	+	1 496	0	496	0	4
3	5250,651	5	652	-	1 652	-	1 651	0	6
8	5270,361	7	360	+	1 362	-	1 -	-	7
3	5307,366	9	365	+	1 367	-	1 364	+	3
3	5328,537	8	538	-	1 535	+	2 -	0	5
5	5341,027	3	028	-	1 027	0	027	0	4

Cadmiumlinie verwendet wurde, berechnet. 14 von diesen Photogrammen waren in zweiter, die übrigen 31 in erster Ordnung aufgenommen. Jede in der ersten Ordnung des Gitters hergestellte Aufnahme umfaßte einen Bezirk von ca. 1000 Å.-E., die in der zweiten gewonnenen je 500 Å.-E. ungefähr. Die Anzahl der auf einer Platte ausgemessenen Linien schwankte zwischen 2 und 22. Bei meinen Messungen war von vornherein beabsichtigt, vorerst nur eine kleinere Zahl von Eisenlinien zu bestimmen. Daher sind nicht alle brauchbaren Linien

Tabelle 2.
Wellenlängen im Neonspektrum.

Intensität i.	Wallerath λ Å.-E.	Wahrscheinl. Fehler der Messung Å.-E.	Burns, Meg- gers u. Merrill λ Å.-E.	Differenz W. Burns, Meggers u. Merrill Å.-E.	Meissner λ Å.-E.	Differenz W. M. Å.-E.	Paschen (berechnet) λ Å.-E.	Differenz W. P. Å.-E.	Priest λ Å.-E.
a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	h.	i.	k.
10	5852,488	$\pm 0,0002$	488	0,000	4875	0,000	487	+0,001	4862
7	5881,894	4	895	-	1	896	-	2	894
8	5944,834	2	834	0	834	0	833	+	18344
5	5975,534	1	534	0	534	0	534	0	—
5	6029,998	5	997	+	1	999	-	1	996
7	6074,337	2	338	-	1	337	0	335	+
8	6096,163	3	163	0	162	+	1	163	0
9	6143,062	2	062	0	061	+	1	060	+
6	6163,594	4	594	0	594	0	594	0	—
5	6217,278	6	280	-	2	279	-	1	278
7	6266,495	1	495	0	495	0	497	-	24948
5	6304,789	5	789	0	789	0	787	+	27929
8	6334,428	2	428	0	428	0	427	+	1
7	6382,990	5	991	-	1	991	-	1	989
10	6402,246	3	245	+	1	2460	0	246	0
9	6506,528	2	528	0	527	+	1	528	0
7	6532,882	4	883	-	1	881	+	1	879
8	6598,953	3	953	0	953	0	954	-	1
9	6678,276	2	276	0	275	+	1	275	+
4	6717,042	5	043	-	1	042	0	044	-
7	6929,466	4	468	-	2	465	+	1	464
8	7024,047	7	049	-	2	—	—	046	+
8	7032,411	3	413	-	2	410	+	1	408
3	7051,309	9	—	—	314	-	5	295	+
4	7059,117	8	111	+	6	119	-	2	123
6	7173,937	5	939	-	2	938	-	1	936
7	7245,164	3	167	-	3	165	-	1	162
5	7488,891	8	902	-	11	885	+	6	893
3	7472,454	10	—	—	456	-	2	450	+
4	7488,889	8	885	+	4	85 G.	+	39	911
5	7535,784	2	784	0	786	-	2	750	+
4	7544,053	6	050	+	3	061	-	8	077

der Negative ausgemessen worden. Ich habe mich darauf be-
schränkt, die Gruppe stabiler Eisenlinien der Region $\lambda 3558$
bis $\lambda 5341$ Å.-E. mit der primären Normale zu vergleichen,
welche der letzte Wellenlängenkongreß zu Rom vom Mai 1922
teils als Ersatzlinien für ungeeignete internationale sekundäre
Normalen, teils zur Ausfüllung von größeren Lücken zwischen
solchen Bezugslinien vorgeschlagen und deren Anschluß an

die rote Cadmiumlinie er empfohlen hat. Die 30 Wellenlängenzahlen der Tab. 1 sind die Werte, welche meine Messungen an diesen Linien ergeben haben.

Die in Tab. 2 als Versuchsergebnisse angeführten Wellenlängen gehören 32 Linien der Region $\lambda 5850$ — $\lambda 7550$ Å.-E. des Neonspektrums an; neben Messungen an den ausdrücklich vom letzten Wellenlängenkongreß gewünschten Linien oberhalb $\lambda 6750$ Å.-E., von denen ich 12 bestimmt habe, sind Kontrollmessungen an den 9 Wellenlängen des Bezirks $\lambda 5850$ bis $\lambda 6400$ Å.-Einheiten durchgeführt worden, für welche das Wellenlängenkomitee der letzten Tagung der Astronomical Union bereits zur Mittelbildung geschritten ist; außerdem wurden noch 11 Linien der Gegend $\lambda 5950$ — $\lambda 6720$ Å.-E. gemessen, deren Wellenlängen bereits von K. W. Meissner und vom Bureau of Standards ermittelt worden sind, und welche sich — ebenso wie die übrigen Neonlinien des gelben und roten Spektralbezirkes — vorzüglich zu sekundären Normalen eignen.

Tabelle 3.
Wellenlängen im Cadmiumspektrum.

Intensität i.	Wallerath λ Å.-E.	Wahrsch. Fehler der Messung Å.-E.	Burns u. Meggers λ Å.-E.	Differenz W.-Burns u. Meggers λ Å.-E.	Michelson u. Benoît λ Å.-E.	Differenz W.-Mi- chelson u. Benoît Å.-E.
a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.
8	3466,200	$\pm 0,0002$	2010	-0,001	—	0,00—
5	3467,656	4	6559	0	—	—
8	3610,510	3	5098	0	—	—
6	3612,876	5	8748	+ 1	—	—
5	4662,352	3	3525	- 1	—	—
8	4678,151	1	1504	1	150	+ 1
8	4799,912	2	9139	- 2	9088	+ 3
8	5085,823	1	8230	0	8219	+ 1

In Tab. 3 sind die Wellenlängen von 8 Cadmiumlinien der Gegend $\lambda 3466$ — $\lambda 5086$ Å.-E. als endgültige Versuchsergebnisse mitgeteilt. Diese Linien gehören der Gruppe von Cadmiumwellenlängen an, welche der letzte Kongreß ebenfalls als sekundäre Standards vorgeschlagen und deren Anschluß an die rote Cadmiumlinie er empfohlen hat. Untersuchungen an Cadmiumlinien waren zunächst nicht in das Programm der

vorliegenden Arbeit aufgenommen. Da die Ermittlung der Phasensprungkorrektionskurve für meine Eisen- und Neommessungen doch die Zuhilfenahme des Cadmiumspektrums wünschenswert erscheinen ließ, lag es nahe, die systematischen Messungen auf geeignete Linien des letzteren auszudehnen. Soweit das Reflexionsvermögen des auf den Interferometerplatten chemisch niedergeschlagenen Silbers es mir erlaubte, bin ich in diesem Spektrum nach kürzeren Wellen hin vorgedrungen.

Die in den Tabellen angegebenen relativen Intensitäten sind für die einzelnen Spektren nach Gitteraufnahmen einheitlich geschätzt.

Um ein Urteil über die erzielte Meßgenauigkeit zu ermöglichen, enthalten diese Tabellen den zu jeder Linie gehörigen wahrscheinlichen Fehler, der den 9 Einzelmessungen ihrer Wellenlänge entspricht. Zum Vergleich habe ich noch die auf gleiche Bedingungen (Messung in internationalen Åström-Einheiten, Wellenlängenwerte für Luft von 15° C bei 760 mm Druck) bezogenen, ebenfalls auf interferometrischem Wege gewonnenen Zahlen anderer Beobachter, zudem beim Neon noch die aus Seriengesetzmäßigkeiten ermittelten Werte von Paschen¹⁾ beigefügt.

8. Genauigkeit der Ergebnisse und Vergleich mit früheren Messungen.

Die bei meinen Messungen an den ausgewählten Eisenlinien der Tab. 1 erreichte Genauigkeit läßt kaum etwas zu wünschen übrig; der mittlere wahrscheinliche Fehler wächst in keinem Falle auf $\pm 0,001$ Å.-E. an. Nur für 6 Linien übersteigt er $\pm 0,0006$ Å.-E. Die Wellenlängenwerte dieser Tabelle, für die der wahrscheinliche Fehler der Messung kleiner als $\pm 0,0007$ Å.-E. ist, dürften bis auf eine Unsicherheit von $\pm 0001-0,002$ Å.-E. absolut genau gemessen sein; die übrigen, mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm 0,0007-0,0009$ Å.-E. behafteten, bis auf eine solche von $\pm 0,002-0,003$ Å.-E. Dieses günstige Resultat hat wohl nicht zum geringsten seine Ursache darin, daß es sich um ausgesuchte, stabile und homogene Linien handelt, die fast durchweg mit der ausschließlich

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 60. S. 405—453. 1919.

benutzten Normallichtquelle, dem Pfundbogen, scharfe, sehr genau meßbare Interferenzfransen bis zu einem Gangunterschied von 40000—60000 Wellenlängen ergaben.

Meine in Spalte b dieser Tab. 1 angegebenen, unter Beachtung der vom letzten Wellenlängenkongreß gegebenen Betriebsvorschriften für den Eisenbogen als Normalenlichtquelle erhaltenen Werte sind die ersten in unmittelbarem Anschluß an die primäre Vergleichsnormale bestimmten Wellenlängenzahlen dieser Linien. Zum Vergleich habe ich daher in den Spalten d, f und h nur die Ergebnisse heranziehen können, bei deren Ermittlung die fraglichen Linien durch Vergleich mit internationalen sekundären Normalen auf interferometrischem Wege gemessen worden sind.

Von solchen führe ich in der Spalte f die als tertiäre Interferometernormalen von St. John und Babcock¹⁾ unter Verwendung des 12 mm-Pfundbogens bei Maximalbelastung bis zu 5 Amp. als Lichtquelle und stabiler, vom Poleffekt nicht beeinflusster sekundärer Bezugslinien ermittelten Zahlen an.

Spalte h gibt die Wellenlängenwerte, welche im Bureau of Standards von Burns, Meggers und Merril²⁾ bei Benutzung der Zentralzone des 6 mm - 6 Amp.-Eisenbogens, den der letzte Wellenlängenkongreß zu Bonn im Jahre 1913 als Normalenlichtquelle eingeführt hatte, und beliebiger sekundärer Normalen interferometrisch bestimmt worden sind. In der Spalte d sind diejenigen Zahlen zum Vergleich angeführt, welche der letzte Wellenlängenkongreß zu Rom 1922 als Wellenlängenwerte der fraglichen Linien vorgeschlagen hat. Es sind Mittelwerte aus den Ergebnissen von ausgewählten Messungsreihen, bei welchen diese Linien sowohl durch Gitter- als auch durch Interferometermessungen als tertiäre Normalen bestimmt worden sind. Die Spalten e, g und i geben die jeweiligen Abweichungen meiner Werte von denjenigen der Vergleichsreihen an.

Mit Ausnahme der Linie λ 4095 Å.-E. stimmen die vom Kongreß vorgeschlagenen Mittelwerte (vgl. die Spalten b, d

1) Ch. E. St. John u. H. D. Babcock, *Astroph. Journ.* 53. S. 260 bis 299. 1921.

2) K. Burns, W. F. Meggers u. P. W. Merril, *Bull. Bur. Stand.* 13. Nr. 2. 1916.

und e) recht gut mit meinen 30 Zahlen überein. Die Abweichungen W.-V. N. in Spalte e betragen für 8 Linien 0,000 Å.-E., für 21 $\pm 0,001$ Å.-E., für keine $\pm 0,002$ Å.-E. und nur für λ 4095 $- 0,003$ Å.-E. Die Summe der positiven Differenzen ist $+ 0,011$ Å.-E., die der negativen $- 0,013$ Å.-E.; die mittlere Differenz macht $\pm 0,0008$ Å.-E. aus, und die systematische Abweichung $- 0,00007$ Å.-E. Möglicherweise ist mein Wert für λ 4095 um $0,002-0,003$ Å.-E. zu niedrig. Die Linie wurde in der zweiten Ordnung des Gitters bei sehr engem Spektrophenspalt unter Verwendung des 2 mm-, 5 mm- und 11 mm-Etalons und des Kohle-Eisenpfundbogens photographiert und zeigte scharfe Interferenzen auf allen zur Messung herangezogenen Negativen, obwohl ihre Intensität verhältnismäßig gering ist. Sie ließ sich mit derselben Sicherheit messen, wie die meisten der von mir bestimmten Eisenlinien; die Berechnung lieferte, wie aus dem angegebenen wahrscheinlichen Fehler von $\pm 0,0005$ Å.-E. hervorgeht, Einzelergebnisse von durchaus zufriedenstellender Übereinstimmung. Die vollkommene Übereinstimmung meines Wertes mit dem von St. John und Babcock (vgl. die Spalten f und g) ebenfalls bei Verwendung des 12 mm-5 (und weniger) Amp.-Pfundbogens erhaltenen spricht andererseits für die Richtigkeit meiner Wellenlängenzahl, so daß auch angenommen werden kann, der vom Kongreß vorgeschlagene Mittelwert basiere auf Ergebnissen einzelner Beobachter, welche aus irgendwelchen Gründen, möglicherweise infolge anderer Emissionsbedingungen in den benutzten Lichtquellen, um einige Tausendstel Å.-E. falsch sind. Eine endgültige Entscheidung wird erst getroffen werden können, wenn von anderer Seite ebenfalls Messungen an dieser Linie vorliegen.

Sehr zufriedenstellend ist die Übereinstimmung meiner Werte mit denen von St. John und Babcock (vgl. die Spalten f und g in Tab. 1; G bedeutet Gittermessung). Die Abweichungen St. Johns und Babcocks (Spalte g) sind 0,000 Å.-E. für 14 von den 30 gemessenen Linien, $\pm 0,001$ Å.-E. für 11, $\pm 0,002$ Å.-E. für die 5 übrigen. Die Summe der positiven Differenzen ist $+ 0,011$ Å.-E., die der negativen $- 0,010$ Å.-E.; die mittlere Abweichung beträgt $\pm 0,0007$ Å.-E. und die systematische $+ 0,000003$ Å.-E. Weniger gut, aber immerhin noch recht befriedigend, ist auch die Übereinstimmung der Werte des

Bureau of Standards mit meinen Ergebnissen (vgl. die Spalten b, h und i in Tab. 1). Das Wellenlängenverzeichnis, dem diese Zahlen entnommen sind, enthält 26 von den stabilen Eisenlinien, die ich gemessen habe. Die Abweichungen Meggers und Merrils (Spalte i) betragen: 0,000 Å.-E. für 10, $\pm 0,001$ Å.-E. für 7, $\pm 0,002$ Å.-E. für 8 Linien und $+ 0,003$ Å.-E. für die eine Wellenlänge $\lambda 4994$ Å.-E. Die Summe der positiven Differenzen ist $+ 0,018$ Å.-E., die der negativen $- 0,008$ Å.-E.; die mittlere Abweichung beträgt $\pm 0,001$ Å.-E. und die systematische $+ 0,0004$ Å.-E. Die hier häufiger auftretenden Differenzen von $\pm 0,002$ Å.-E. für $\lambda 4994$ Å.-E. sogar $+ 0,003$ Å.-E. haben vermutlich ihren Grund darin, daß der von Burns, Meggers und Merril benutzte alte internationale 6 mm-6 Amp.-Eisenbogen die Linien nicht so scharf und homogen zu produzieren und so exakt interferometrisch zu messen gestattet wie der 12 mm-5 Amp.-Pfundbogen, weil hohe Interferenzordnungen verwendet werden können.

Spalte b in Tab. 2 enthält die endgültigen Ergebnisse meiner Messungen an 32 Neonlinien, Spalte c den wahrscheinlichen Fehler der Messung, wie ihn die neun dem angegebenen Mittelwert zugrundeliegenden Einzelbestimmungen ergeben. Die Kolonne d enthält zum Vergleich die Zahlen, die im Bureau of Standards von Burns, Meggers und Merril¹⁾ bis $\lambda 7032$ Å.-E. durch direkten Vergleich mit Cd, $\lambda 6438$ Å.-E., für längere Wellen durch Anschluß an einzelne ausgesuchte Neonlinien als Hilfsnormalen auf interferometrischem Wege erhalten wurden, Spalte f die Versuchsergebnisse von interferometrischen Messungen Meissners^{2) 3)}, die bis $\lambda 7245$ Å.-E. auf die rote Cadmiumlinie als Normale bezogen sind, nach längeren Wellen hin auf die im Anschluß an Cd, $\lambda 6438$ Å.-E. bestimmte Neonlinie $\lambda 5400$ Å.-E. als intermediäre Hilfsnormale. In Spalte h sind die aus Seriengesetzmäßigkeiten zurückberechneten Mittelwerte Paschens⁴⁾ für die betreffenden Wellenlängen angeführt, denen Paschen eine größere Genauigkeit

1) K. Burns, W. F. Meggers u. P. W. Merril, Bull. Bur. Stand. 15. S. 765—775. 1918.

2) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. 51. S. 95—116. 1916.

3) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. 58. S. 333—348. 1919.

4) F. Paschen, Ann. d. Phys. 60. S. 405—453. 1919.

zuspricht als den Ergebnissen von Einzelmessungen der praktischen Spektroskopie, in Spalte k die mit Überschätzung der erzielten Genauigkeit bis auf die Zehntausendstel der Å.-E. interferometrisch gewonnenen Werte Priests¹⁾, die auf die mit der roten Cadmiumlinie verglichene Neonlinie λ 5852 Å.-E. bezogen sind. Die Spalten a, e, g und i bedürfen keiner Erläuterung.

Aus Spalte c ist ersichtlich, daß der wahrscheinliche Fehler der Bestimmungen nur in einem Falle, nämlich für die sehr schwache Linie λ 7472 Å.-E., den Betrag von $\pm 0,001$ Å.-E. erreicht. Nur für fünf schwächere und eine mittelstarke Linie, sämtlich oberhalb λ 7000 Å.-E. gelegen, übersteigt er $\pm 0,0006$ Å.-E. Die Wellenlängenwerte der Linien, für die der wahrscheinliche Fehler der Messung $\pm 0,0003$ Å.-E. nicht überschreitet, werden bis auf eine Unsicherheit von $\pm 0,001$ Å.-E. exakt sein, diejenigen, für welche dieser Fehler zwischen den Grenzen $\pm 0,0003$ und $0,0006$ Å.-E. liegt, bis auf eine solche von $\pm 0,002$ Å.-E. Die mit einem wahrscheinlichen Fehler von mehr als $\pm 0,0006$ Å.-E. behafteten Werte der schwächeren Linien im Rot jenseits λ 7000 Å.-E. dürften bis auf eine Unsicherheit von $\pm 0,003$ — $0,004$ Å.-E. genau sein.

Die Zahlen, welche Burns, Meggers und Merril für die von mir bestimmten Linien ermittelt haben, stimmen bis auf λ 7059, λ 7438 und λ 7488 Å.-E. sehr gut mit den meinigen überein (vgl. die Spalten b, d und e in Tab. 2); dasselbe gilt in noch höherem Maße von den Messungsergebnissen Meissners (vgl. die Spalten f und g), die, abgesehen von λ 7488 Å.-E., für welche Linie dieser Beobachter nur den Wert einer Gittermessung gibt, von der sehr schwachen Linie λ 7051, der mittelstarken λ 7438 und der schwächeren λ 7544 Å.-E. im weiten Rot, Abweichungen von höchstens $\pm 0,002$ Å.-E. aufweisen.

Von besonderem Interesse ist auch die bis auf wenige Ausnahmen vorzügliche Übereinstimmung meiner Zahlen mit den theoretischen Werten Paschens (vgl. die Spalten h und i in Tab. 2).

Die Zahlen Priests (Spalte k) zeigen bis auf den Wert für die stärkste Neonlinie λ 6402 Å.-E., für welche die Ab-

1) Irwin G. Priest, Bull. Bur. Stand. 8. S. 539—544. 1912.

weichung $+0,007 \text{ \AA.-E.}$ beträgt, ebenfalls eine recht befriedigende Übereinstimmung mit den meinigen. Zugunsten meines Wertes für diese Linie sowohl als auch desjenigen für $\lambda 6304 \text{ \AA.-E.}$, wo die Differenz $+0,004 \text{ \AA.-E.}$ ist, spricht die vorzügliche Übereinstimmung der Zahlen Paschens, Meissners und des Bureau of Standards mit meinen Ergebnissen.

Daß im roten Spektralbezirk oberhalb $\lambda 7000 \text{ \AA.-E.}$ die Übereinstimmung der verschiedenen Messungsreihen in Tab. 2 manches zu wünschen übrig läßt, ist begreiflich, wenn man die experimentellen Schwierigkeiten in Betracht zieht, welche die Herstellung brauchbarer Interferenzspektrogramme in dieser Region bereitet. Zugunsten meiner Werte für die hier in Frage kommenden Linien sprechen einerseits die bessere Übereinstimmung meiner Zahlen mit den theoretischen Werten Paschens, anderseits der direkte Anschluß meiner Messungen an die rote Cadmiumlinie und die Überlegenheit der von mir benutzten Neongleichstromlampe über das Geißlerrohr, was die Intensität der von den beiden Lichtquellen emittierten Linien und damit die Prägnanz der Interferenzerscheinung, die Meßgenauigkeit und Zuverlässigkeit der Versuchsergebnisse anbetrifft. Immerhin bedarf es in diesem Spektralbezirk noch der Kontrollmessungen von anderer Seite, ehe eine endgültige Entscheidung getroffen werden kann.

In Kürze sei noch bemerkt, daß die von mir gemessenen Neonlinien durchweg eine einfache Struktur besitzen. Auch Umkehrungserscheinungen waren nicht festzustellen.

In Spalte b der Tab. 3 sind die endgültigen Ergebnisse meiner Messungen an acht Cadmiumlinien der Gegend $\lambda 3466$ bis $\lambda 5086 \text{ \AA.-E.}$ angeführt. Kolonne c enthält die wahrscheinlichen Fehler, d die Werte, welche Meggers und Burns¹⁾ durch Vergleich mit der roten Cadmiumlinie für die Wellenlängen dieser Linien erhalten haben, f die auf internationales System umgerechneten Zahlen von Michelson²⁾ und Benoît³⁾ für die grüne und die beiden blauen Linien. Die Spalten a, e und g bedürfen keiner Erläuterung. Die Zahlen der Kolonne b

1) W. F. Meggers u. K. Burns, Bull. Bur. Stand. 18. S. 185 bis 199. 1922.

2) A. A. Michelson, Journ. de Phys. (3) 3. S. 5—22. 1894.

3) R. Benoît, Journ. de Phys. (3) 7. S. 57—68. 1898.

dürften insgesamt bis auf $+0,001 \text{ \AA.-E.}$ exakt sein. Von der Angabe der vierten Dezimale der \AA.-E. in diesen Ergebnissen habe ich deshalb abgesehen, weil eine solche den Eindruck der absoluten Sicherheit der Tausendstel erwecken muß, welche die Resultate eines einzelnen Beobachters bei der Messung sekundärer Normalen, selbst wenn es sich um die homogenen und äußerst scharfen Linien der Edelgasspektren oder des Cadmiumvakuumbogens handelt, wohl kaum für sich beanspruchen dürfen.

Die Übereinstimmung meiner Werte mit denen des Bureau of Standards (vgl. Spalte e) sowie denjenigen von Michelson und Benoît (Spalte g) läßt nichts zu wünschen übrig, abgesehen von der blauen Linie $\lambda 4800$, für welche die Abweichung gegen Michelson $+0,003 \text{ \AA.-E.}$ beträgt, obwohl meine Messungen an dieser Linie mit großer Genauigkeit durchgeführt werden konnten. Da die Differenz Burns und Meggers—Michelson und Benoît für diese Linie (vgl. die Spalten d und f) von demselben Vorzeichen ist und sogar $+0,005 \text{ \AA.-E.}$ ausmacht, scheint sich die Vermutung Pfunds¹⁾ zu bestätigen, daß der Wert Michelsons zu klein sein müsse. Als Bezugsnormale bei exakten Messungen ist diese Linie jedenfalls nicht zu empfehlen, was auch schon daraus hervorgeht, daß sie nicht in die Liste derjenigen Cadmiumwellenlängen aufgenommen worden ist, welche der Normalenausschuß auf der letzten Tagung der Konferenz zu Rom 1922 als geeignet für sekundäre Normalen befunden, und deren baldigen Anschluß an die rote Cadmiumlinie er den an der Lösung des Normalenproblems arbeitenden Physikern nahegelegt hat.

9. Zusammenfassung.

1. Eine Versuchsanordnung für den direkten Vergleich von Wellenlängen mit der roten Cadmiumlinie nach der Interferenzmethode von Fabry und Buisson wird beschrieben und untersucht. Sie enthält nur Quarz-Flußspatoptik, so daß die Messungen auch im Bereich kürzerer Wellen durchgeführt werden können.

1) A. H. Pfund, *Astroph. Journ.* 28. S. 197—211. 1908.

2. Mittels dieser Apparatur sind unter Beachtung der vom letzten Wellenlängenkongreß zu Rom 1922 hinsichtlich der sekundären Normalen gegebenen Empfehlungen folgende Messungen an insgesamt 70 Linien durchgeführt worden, welche dem Spektralbezirk λ 3466—7544 Å.-E. angehören. Bei ausschließlicher Verwendung des 12 mm-5 Amp.-Pfundbogens als Lichtquelle wurden die 30 stabilen Linien der Region λ 3558 bis λ 5341 Å.-E. aus der Liste bisheriger tertiärer Normalen an Cd, λ 6438 Å.-E. angeschlossen, welche der Wellenlängennormalenausschuß des Kongresses teils als Ersatzlinien für instabile sekundäre internationale Bezugsnormalen, teils zur Ausfüllung größerer Lücken im Verzeichnis der bislang vorliegenden sekundären Standards vorgeschlagen hat. Neben acht Wellenlängen des Cadmiumvakuumbogenspektrums der Gegend λ 3466— λ 5086 Å.-E. sind noch unter Verwendung einer neuen Type von Neongleichstromlampe als Lichtquelle 32 Neonlinien der Spektralregion λ 5852— λ 7544 Å.-E. mit der roten Cadmiumlinie verglichen worden.

Die Bestimmung der von der Union vorgeschlagenen Normalen im ultravioletten Teil des Eisenspektrums von λ 3870 Å.-E. an abwärts ist in Angriff genommen. Die Ausdehnung der Messungen auf den kurzwelligen sowie auch den infraroten Teil des Neonspektrums ist ebenfalls geplant.

Bonn, Physikal. Institut der Universität, im April 1924.

(Eingegangen 5. Mai 1924.)

4. *Über den Dopplereffekt an Kanalstrahlen von Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff;* *von Hermann Krefft.*

(Auszug aus der Münchner Dissertation.)

Einleitung. — § 1. Versuchsanordnung. — § 2. Wasserstoff in Wasserstoff. — § 3. Wasserstoff in Sauerstoff und Stickstoff. — § 4. Vergleich mit anderen Beobachtungen. — § 5. Vergleich der Dopplerkurve mit der Teilchenzahlkurve der elektromagnetischen Analyse. — § 6. Die Geschwindigkeitsverteilung des Kanalstrahls. — § 7. Zusatz von Sauerstoff und Stickstoff im Entladungsraum. — § 8. Der Dopplereffekt im Pinsel. — § 9. Der Dopplereffekt an den Funkenlinien des Sauerstoffs und Stickstoffs. — Zusammenfassung.

Es ist durch Versuche von W. Wien¹⁾ bekannt, daß das neutrale Wasserstoffatom der Träger der Balmerlinien ist. Diese Linien besitzen einen intensiven Dopplereffekt. Durch die Beziehung:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

ist jeder spektralen Verschiebung $\Delta\lambda$ eine Geschwindigkeit zugeordnet. Der Dopplereffekt der Balmerlinien bietet also eine Möglichkeit, die Geschwindigkeitsverteilung der leuchtenden neutralen Wasserstoffatome zu messen.

Durch die elektromagnetische Analyse wird die Geschwindigkeitsverteilung der geladenen Ionen gemessen. Von Anfang an interessierte ein Vergleich mit der am Dopplereffekt beobachteten Geschwindigkeitsverteilung.

Neuere Versuche an homogenen Kanalstrahlen von E. Rüchardt²⁾ haben gezeigt, daß die Geschwindigkeitsverteilung der neutralen und der positiven Wasserstoffatome nicht die gleiche ist, da das Verhältnis beider Teilchen eine Funktion der Geschwindigkeit ist.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 69. S. 325. 1922.

2) E. Rüchardt, Ann. d. Phys. 71, 377. 1927.

Retschinsky¹⁾ konnte bei einem Vergleich der Dopplerkurve mit der positiven Teilchenzahlkurve des Wasserstoffs keine Übereinstimmung finden. Nach dem bisher gesagten ist auch eine solche gar nicht zu erwarten. Eine zweite Frage, die bei diesem Vergleich von Wichtigkeit ist, ist die, ob die Dopplerkurve der Balmerlinien auch die Geschwindigkeitsverteilung der neutralen Wasserstoffatome wiedergibt, das heißt, ob die Leuchterregung von der Geschwindigkeit unabhängig ist. Denn nur im Falle einer Unabhängigkeit gibt die Intensitätskurve des Dopplereffekts die Geschwindigkeitsverteilung der neutralen Teilchen.

Die Vorgänge im Kanalstrahl werden durch den Begriff der freien Weglänge beschrieben. So entspricht dem Vorgang der Erregung zum Leuchten bei Kanalstrahlen eine freie Weglänge der Leuchterregung.²⁾

Die bisherigen Beobachtungen am Dopplereffekt der Balmerlinien gestatten einen qualitativen Schluß auf die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der freien Weglänge der Leuchterregung von neutralen Wasserstoffatomen. Denn die ausnahmslos gemachte Beobachtung einer Grenze des Dopplereffekts bedeutet, daß oberhalb einer bestimmten Geschwindigkeit die freie Weglänge der Leuchterregung unendlich groß wird.

Allerdings beweist nachfolgende Zusammenstellung, daß diese Grenzgeschwindigkeit bisher wenig genau gemessen ist.

	Wilsar ³⁾	Vegard ⁴⁾	Stark ⁵⁾	Saxén ⁶⁾
v_{\max} 10 ⁸ cm/sec	0,945	1,03	1,52	1,16
v_{\max} in Volt	4650	5500	12000	7000

Auch in anderer Hinsicht sind Lücken und zahlreiche Widersprüche vorhanden. Daher beschäftigt sich diese Arbeit in erster Linie mit einer Untersuchung des Dopplereffekts des Wasserstoffs, wobei auf möglichst zahlreiches Material Gewicht gelegt wird. Im Anschluß daran werden auch Messungen am

1) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. 50. S. 369, 1916

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 70. S. 1. 1923.

3) H. Wilsar, Ann. d. Phys. 39. S. 1251. 1912.

4) L. Vegard, Ann. d. Phys. 41. S. 634. 1913.

5) J. Stark u. W. Steubing, Ann. d. Phys. 28. S. 974. 1909.

6) B. Saxén, Ann. d. Phys. 38. S. 338. 1913.

Dopplereffekt der Funkenlinien von Sauerstoff und Stickstoff angestellt.

Der Vergleich der Dopplerkurve einer Balmerlinie mit der Teilchenzahlkurve der elektromagnetischen Analyse setzt also die Berücksichtigung zweier Faktoren voraus: der erste, nämlich die Abhängigkeit des Verhältnisses der positiven zu den neutralen Wasserstoffatomen von der Geschwindigkeit, ist hinreichend genau bekannt, während der zweite noch eine offene Frage ist. Ein Vergleich der Dopplerkurve mit der Teilchenzahlkurve der positiven Teilchen muß aber zu Aufschlüssen über die freie Weglänge der Leuchterregung führen, wenn sie allerdings auch nur qualitativer Art sind.

§ 1. Versuchsanordnung.

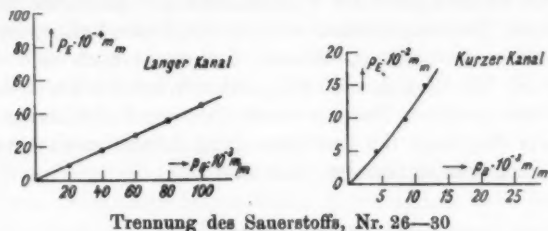
In vorliegender Arbeit findet ausschließlich die Wiensche Durchströmungsmethode Verwendung. Sie erlaubt eine Trennung der Bedingungen vor und hinter der Kathode.

Das Kanalrohr war aus drei Teilen zusammengekittet. Der Kanal wurde aus Messing gedreht, an ihm befanden sich die Pumpansätze. Die Kathode war inwendig wassergekühlt. Für Spannungen oberhalb 15000 Volt diente ein Kanal von 160 mm Länge und einer Bohrung von 2 mm Durchmesser. Das Entladungsrohr besaß meistens einen Durchmesser von 35 mm. Die Stirnfläche der Kathode bestand aus Aluminium. Für niedrige Spannungen wurde ein schlitzförmiger Kanal von 22 mm Länge benutzt. In allen Fällen wurde in einem Winkel von 5° gegen den Kanalstrahl photographiert. Zur Beurteilung der überlagernden Wirkung ruhender Linien wurden einige Transversalaufnahmen gemacht.

Der Durchströmungsmechanismus war der übliche. Da im Entladungsraum auch mit Gasgemisch gearbeitet wurde, endigten in ihm zwei voneinander unabhängige Kapillaren. Eine dritte führte dem Beobachtungsraum das erforderliche Gas zu. Die Drucke im Entladungs- und Beobachtungsraum wurden mit Mc.Leod gemessen. Das Vorvakuum wurde durch eine Leyboldsche Ölpumpe erzeugt. Am Hauptvakuum pumpten in den meisten Fällen drei Gaedesche Diffusionspumpen. Zwischen diesen Pumpen und der Ölpumpe war noch

eine Quecksilberdampfstrahlpumpe oder eine rotierende Gaedepumpe eingeschaltet.

Das Trennungsvermögen des langen sowie des kurzen Kanals wird durch Fig. 1 angegeben. Darin bedeuten p_E und p_B die Drücke im Entladungs- bzw. Beobachtungsraum.



Trennung des Sauerstoffs, Nr. 26—30

Fig. 1.

Der Wasserstoff wurde im Kippschen Apparat erzeugt und über Phosphorpentoxyd getrocknet. Sauerstoff und Stickstoff wurden Bomben entnommen und ebenso behandelt.

Quecksilberdämpfe wurden vom Kanalrohr durch Kühlung mit Kochsalzkältemischung ferngehalten. Ganz entfernen lassen sie sich schwer; bei höheren Spannungen trat daher schwach die Hg-Linie 4358,56 auf. Die Reinheit der Gase war derart, daß außer dieser Linie niemals Linien festgestellt wurden, die nicht zu den verwendeten Gasen gehörten.

Als Stromquelle diente in den meisten Fällen ein Induktorium mit rotierendem Quecksilberunterbrecher. Zum Vergleich wurden einige Aufnahmen mit einer 20-plattigen Influenzmaschine gemacht. Zu Aufnahmen bei niedrigen Spannungen diente diese Maschine und Aggregate von kleinen Dynamomaschinen, von denen jede 500 Volt lieferte. Oberhalb 10000 Volt wurde die Spannung mit Funkenstrecke gemessen, deren Kugeln einen Durchmesser von 50 mm hatten. Die Spannungswerte wurden Messungen von Heydweiller und Voigt entnommen. Ein Bestrahlen der Funkenstrecke fand nicht statt. Unterhalb 10000 Volt bei Gleichstrom diente ein Elektrometer zur Spannungsmessung.

Die Lichtemission wurde mit zwei Prismenspektrographen von verschiedener Dispersion aufgenommen. In allen Fällen

wurde der Kanalstrahl durch einen Kondensor auf dem Spalt des Spektrographen abgebildet.

Die Dopplereffekte wurden teils mit dem Hartmannschen, teils mit dem Kochschen Photometer photometriert. Bei einer Reihe von Aufnahmen geschah es mit beiden.

§ 2. Wasserstoff in Wasserstoff.

Der Dopplereffekt des Wasserstoffs wurde an H_{β} beobachtet. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit stehen in mancher Hinsicht in Widerspruch zu den bisherigen Messungen. Die folgenden Angaben beziehen sich auf Messungen, die in einem Spannungsbereich von 15000 bis 70000 Volt gemacht wurden. Die Aufnahmen Nr. 20—24 wurden mit Induktorium gemacht, die Dispersion des Spektrographen betrug 56,9 Å.-E. pro Millimeter bei H_{β} . Der Kanal war 160 mm lang, die Kathode hatte einen Durchmesser von 35 mm. Alle näheren Angaben sind aus Tabelle I ersichtlich. Darin bedeutet:

- V die Betriebsspannung in Volt,
- I den Strom in Milliampère,
- p_B den Druck im Beobachtungsraum in 10^{-3} mm Hg,
- v_{\max} die maximale Geschwindigkeit des Dopplereffekts,
- v_1 die Geschwindigkeit des langsamen Intensitätsmaximums,
- v_2 die Geschwindigkeit des schnellen Intensitätsmaximums,
- v die aus der Spannung unter Annahme ionisierter Atome berechnete Geschwindigkeit.

Diese Aufnahmen zeigen keine Spur von der erwähnten Dopplergrenze. Die maximale Geschwindigkeit wächst mit der Spannung, ohne auch bei der höchsten Spannung auf eine solche Grenze hinzudeuten. Der Dopplerstreifen zeigt bei höheren Spannungen eine deutliche Unterteilung. Oberhalb 40000 Volt erhebt sich ein schnelles Maximum, das mit der Spannung rasch intensiver wird, bis es bei etwa 70000 Volt fast die Intensität des langsameren Maximums erreicht, welches bis zu 1400 Volt hinunter stets vorherrschend ist. Der schnelle Dopplerstreifen wird von dem langsamen durch ein tiefes Minimum getrennt. Diese beiden Maxima sind schon bei

Tabelle I.
Wasserstoff in Wasserstoff.

Nummer	Spannung V in Volt	v $\cdot 10^8$ cm/sec	J Milliamp.	P_E $\cdot 10^{-3}$ mm	P_B $\cdot 10^{-3}$ mm	v_{\max} $\cdot 10^8$ cm/sec	v_1 $\cdot 10^8$ cm/sec	v_2 $\cdot 10^8$ cm/sec
20a	69 000	3,65	1,1	—	4	2,34	0,70	1,75
21a	58 000	3,35	1,2	—	4	2,12	0,70	1,44
22a	47 000	3,01	1,65	—	4	1,68	0,66	—
23a	33 000	2,53	2,3	—	4	1,38	0,60	—
24a	20 000	1,96	3,8	—	4	0,95	0,45	—
20b	69 000	3,65	1,1	—	13,5	2,50	0,72	1,83
21b	58 000	3,34	1,2	—	13,5	2,15	0,70	1,39
22b	47 000	3,01	1,65	—	13,5	1,75	0,66	—
23b	34 000	2,56	2,3	—	13,5	1,43	0,64	—
24b	20 000	1,96	3,8	—	13,5	1,02	0,52	—
20c	68 500	3,64	1,1	—	40,0	2,60	0,66	1,83
21c	58 000	3,36	1,2	—	40,0	2,15	0,71	1,50
22c	46 000	2,99	1,65	—	40,0	1,86	0,66	—
23c	33 000	2,52	2,3	—	40,0	1,45	0,59	—
24c	20 000	1,96	3,8	—	40,0	1,02	0,50	—
20d	69 000	3,65	1,1	—	93,0	2,49	0,74	1,79
21d	59 000	3,36	1,2	—	93,0	2,28	0,70	—
22d	47 000	3,02	1,65	—	93,0	1,83	0,67	—
23d	34 500	2,58	2,3	—	93,0	1,61	0,65	—
24d	19 000	1,93	3,8	—	93,0	1,04	0,52	—
20e	70 000	3,68	1,1	—	135	2,56	0,77	1,90
21e	58 000	3,35	1,2	—	135	2,27	0,76	—
22e	46 000	2,99	1,65	—	135	1,79	0,72	—
23e	34 500	2,58	2,3	—	135	1,64	0,68	—
24e	19 000	1,92	3,8	—	135	1,03	0,48	—
20f	70 500	3,69	1,1	—	220	2,41	0,76	1,86
21f	58 000	3,36	1,2	—	220	2,26	0,74	—
22f	47 000	3,01	1,55	—	220	1,93	0,70	—
23f	33 000	2,53	2,3	—	220	1,58	0,62	—
24f	18 500	1,89	3,8	—	220	1,02	0,48	—
41a	50 000	3,11	0,2	30,3	4	2,08	0,66	1,39
b	41 000	2,83	0,25	32,0	4	1,90	0,66	1,25
c	31 500	2,47	0,25	33,5	4	1,72	0,60	—
d	26 000	2,24	0,3	35,0	4	1,53	0,59	—
e	19 000	1,92	0,3	39,0	4	1,29	0,52	—
f	12 500	1,54	0,3	44,0	4	1,03	0,47	—
g	7 000	1,16	0,3	49,5	4	0,80	0,37	—

niedrigeren Spannungen vorhanden, sie sind aber noch nicht genügend voneinander entfernt, als daß sich ein Minimum herausbilden könnte, auch ist bei niedrigeren Spannungen das

schnelle Maximum relativ viel schwächer. Ruhende Intensität und Dopplerstreifen trennt ein Minimum, welches schwärzungsfrei ist. Hierauf macht bereits Vegard¹⁾ aufmerksam. Die Hartmannschen Photometerkurven der Aufnahmen 20b bis 24b sind in Fig. 2 zusammengestellt.

Es zeigt sich kein merklicher Einfluß des Druckes im Beobachtungsraum auf die Intensitätsverteilung im Dopplereffekt. Bei höheren Drucken tritt das Viellinienspektrum stärker hervor und stört etwas durch Überlagerung. Bei konstantem Druck tritt es mit steigender Spannung stärker hervor.

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten der Intensitätsmaxima $v_2 : v_1$ in Abhängigkeit von der Spannung zeigt Fig. 3. Dieses Verhältnis wächst mit der Spannung und ist viel größer als 1,4:1.

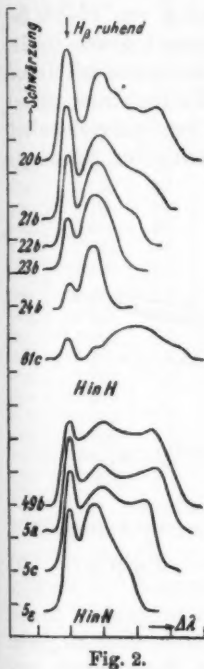


Fig. 2.

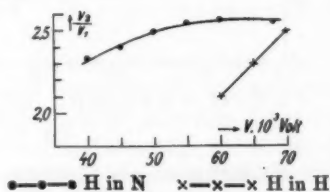


Fig. 3.

Aus der Gleichung

$$\frac{m}{2} v^2 = e V$$

wird unter Annahme von ionisierten Wasserstoffatomen die Geschwindigkeit v berechnet. Das Verhältnis $v_{\max} : v$, $v_2 : v$ und $v_1 : v$ in Abhängigkeit von dieser Geschwindigkeit v ist in Fig. 4 dargestellt. In diese Figur sind auch die gleichen Werte der Aufnahmen 41 eingetragen. Diese wurden, um den Einfluß

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. 41. S. 634. 1913.

der Stromquelle beurteilen zu können, mit Influenzmaschine gemacht, im übrigen unter ähnlichen Bedingungen wie Aufnahmen 20a—24a. Die Versuchsbedingungen sind Tabelle I zu entnehmen. Die Dopplerkurve zeigt den gleichen Verlauf wie bei Betrieb mit Wechselstrom; im Bereich von 10000 bis 50000 Volt ist das Verhältnis $v_{\max}:v$ konstant gleich 0,675. Die Werte $v_2:v$ und $v_1:v$ fallen merklich zusammen mit denen der anderen Aufnahmen. Bei Betrieb mit Wechselstrom nimmt das Verhältnis $v_{\max}:v$ mit der Spannung zu; wahrscheinlich gab in diesem Falle Wechselstrom bei geringerer Spannung

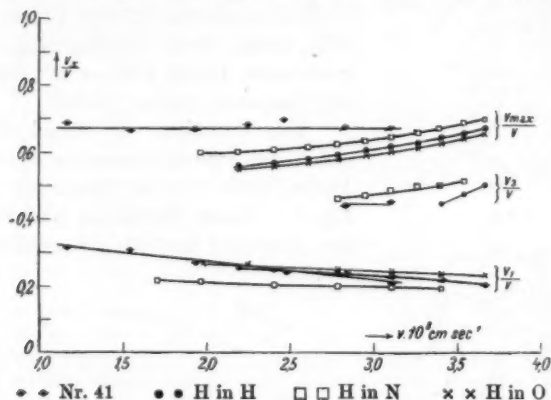


Fig. 4.

größere Schlagweiten als Gleichstrom, wodurch eine zu hohe Spannung vorgetäuscht wird. Bei höheren Spannungen verschwindet diese Differenz. Diese Vermutung wird durch Kontrolle des Gasdrucks im Entladungsraum bestätigt.

Wegen der geringen Reichweite der Kanalstrahlen bei kleineren Geschwindigkeiten wurden die Messungen unter 10000 Volt mit dem kurzen Kanal ausgeführt. Die Aufnahmen erstrecken sich über einen Bereich von 1400 Volt aufwärts.

In Tabelle II sind die Bedingungen angegeben, unter denen die ausgewerteten Aufnahmen gemacht wurden. Die Stromstärke wurde erheblich variiert. Bei dieser Gelegenheit sei erwähnt, daß mit ihrer Erhöhung kein nennenswerter Inten-

Tabelle II.

Numer	Spannung V in Volt	j Milliamp.	p_E $\cdot 10^{-3}$ mm	p_B $\cdot 10^{-3}$ mm	ϑ $\cdot 10^3$ cm/sec	v_{\max} $\cdot 10^6$ cm/sec	v_1 $\cdot 10^3$ cm/sec	v_1' $\cdot 10^3$ cm/sec	v_2 $\cdot 10^3$ cm/sec	v_{\min} $\cdot 10^3$ cm/sec
57b	5 450	2,5	93	8,2	1,02	0,97	0,45	—	—	0,15
59c	2 750	5,0	120	175,0	0,73	0,68	0,32	—	—	0,14
56a	4 600	44,0	270	26,0	0,94	0,76	0,34	—	—	0,09
55c	2 120	45,0	470	40,0	0,64	0,60	0,32	—	—	0,09
55d	1 410	45—60	900	72,0	0,52	0,54	0,31	—	—	0,16
56c	3 200	72	380	32,0	0,79	0,71	0,32	—	—	0,11
55e	2 150	82	550	80,0	0,64	0,54	0,29	—	—	0,08
56e	1 780	105	1000	—	0,59	0,54	0,34	—	—	0,14
56d	1 480	80	1000	80,0	0,54	0,51	0,32	—	—	0,10
55a	1 410	34	410	36,0	0,52	0,65?	0,31	—	—	0,16
55b	2 180	22	350	30,0	0,65	0,68	0,34	—	—	0,09
60e	3 000	1,3	100	11	0,77	0,60	0,26	0,43	—	0,12
60d	4 300	1,3	93	10	0,91	0,60	0,26	0,43	—	0,15
60c	5 300	1,3	88	8	1,01	0,78	0,28	0,44	0,68	0,15
60b	6 800	1,3	81	8	1,14	0,85	0,43	0,66	—	0,15
60a	8 750	1,3	75	7	1,30	0,97	0,52	0,68	0,85	0,20
61a	12 200	1,3	60	6	1,54	1,10	0,56	0,76	0,93	0,23
61b	20 000	1,3	53	5,5	1,96	1,18	0,60	0,85	1,02	—
61c	25 000	1,3	48	5	2,20	1,29	0,71	—	1,20	—
61d	35 000	1,3	41	4,5	2,58	1,81	0,71	—	1,35	0,22
62c	13 200	1,3	54	6	1,60	1,14	0,54	0,76	1,06	0,21

sitätsgewinn verbunden ist. In allen Fällen wurde das Rohr mit Gleichstrom betrieben und die Spannung mit Elektrometer gemessen. Ausgemessen wurde an H_β mit dem Hartmannschen Mikrophotometer. Der Spektrograph hatte bei dieser Linie eine Dispersion von 27,75 Å.-E. pro Millimeter.

Im Bereich von 1400 bis 3000 Volt werden keine Unterteilungen beobachtet, wie sie Paschen¹⁾ und Stark und Steubing²⁾ finden. Das hat vielleicht seinen Grund in der noch zu geringen Dispersion des Spektrographen. Bei 1400 Volt ist das Verhältnis $v_{\max} : v$ fast gleich 1. Mit steigender Spannung nimmt es rasch ab, bei 3000 Volt ist es 0,85. Das gleiche gilt von dem Verhältnis $v_1 : v$. Der Verlauf dieser Verhältnisse ist in Fig. 5 zu sehen, die Parameter sind die üblichen. Im Intervall von 3000—4300 Volt erscheint ein zweites

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 23. S. 247. 1907.

2) J. Stark u. W. Steubing, Ann. d. Phys. 28. S. 974. 1909.

schnelleres Maximum v_1' angedeutet. In diesem Intervall nehmen die genannten Verhältnisse weiter ab. Bei 5300 Volt tritt ein noch schnelleres Maximum v_2 auf. Die drei Maxima sind beobachtbar bis 13000 Volt.

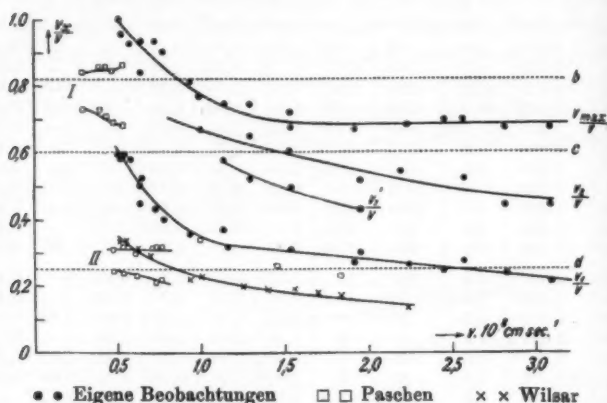


Fig. 5.

Die angegebenen drei Maxima wurden an einer größeren Zahl von Aufnahmen beobachtet. Im Bereich von 5300 bis 8750 Volt rückt das langsamste Maximum auffallend rasch nach größeren Geschwindigkeiten vor. Diesem Vorgang geht ein Breiterwerden des Minimums zwischen ruhender und bewegter Intensität parallel. Dieses Minimum ist zwischen 3000 und 5300 Volt relativ schmal und scharf definiert, da der Dopplereffekt steil ansteigt. Dann wird es breiter und der Anstieg weniger steil. Bei 20000 Volt sind nur noch zwei Maxima vorhanden. Von dieser Spannung an wird das Minimum wieder schmal, bei 25000 Volt erhebt sich im Minimum im Anschluß an den Dopplereffekt ein Streifen, der in Aufnahme 61 c, Fig. 2, als Stufe sichtbar ist. Bei 34500 Volt ist das Minimum wieder schmal.

Ein Vergleich mit den Aufnahmen 20—24 und 41 zeigt, daß die hier mit v_1 und v_2 bezeichneten Maxima den bei hohen Spannungen beobachteten entsprechen. Das Maximum v_1' wird bei hohen Spannungen nicht beobachtet.

§ 3. Wasserstoff in Sauerstoff und Stickstoff.

Um den Kanalstrahl zur Lichtemission zu veranlassen, muß eine anregende Atmosphäre vorhanden sein. Bei Wasserstoff bietet eine Atmosphäre von $\frac{1}{1000}$ mm Druck genügend Anregung, um ein wenn auch schwaches Leuchten in bewegter Intensität zu bewirken. Die Trennung durch den langen Kanal ermöglichte es, den Kanalstrahl durch Sauerstoff oder Stickstoff zum Leuchten anzuregen, ohne daß die Bedingungen im Entladungsraum durch Übertritt dieser Gase wesentlich geändert wurden.

Strasser¹⁾ fand, daß bei einem Zusatz von Stickstoff zum Wasserstoff die Geschwindigkeiten des Dopplereffektes klein wurden und das Minimum zwischen ruhender und bewegter Intensität von bewegter Intensität ausgefüllt wurde. Er arbeitet ohne Trennung der Bedingungen vor und hinter der Kathode mit einem geschlossenen Rohr und vermutet die Ursache zu dieser Beobachtung in der ablenkenden Wirkung des Stickstoffs hinter der Kathode. Eine sichere Entscheidung ist mit dieser Versuchsanordnung natürlich nicht möglich.

Die Tab. III und IV geben die Bedingungen an, unter denen die Aufnahmen in Stickstoff und Sauerstoff gemacht wurden. In welchem Grade der Wasserstoff im Entladungsraum durch übertretendes Gas verunreinigt wurde, ist aus Fig. 1 ersichtlich.

Bei diesen Aufnahmen sind die Stromstärke und die übrigen Versuchsbedingungen dieselben wie bei Aufnahmen 20 bis 24, Tab. I. Die Hartmannschen Photometerkurven der Dopplereffekte 49b—5e sind in Fig. 2 zusammengestellt. Sie zeigen keine Spur von dem Einfluß, den Strasser beobachtet. Im Gegenteil macht sich bemerkbar, daß bei Anregung durch Stickstoff die größeren Geschwindigkeiten intensiver hervortreten. In einem Falle ist das schnelle Maximum intensiver als das langsame.

Bei Anregung durch Sauerstoff liefert die Schwärzungskurve ein etwas anderes Bild. Das schnelle Intensitätsmaximum tritt nicht so intensiv hervor wie bei Anregung durch Wasser-

1) B. Strasser, Ann. d. Phys. 31. S. 890. 1910.

Tabelle III.

Wasserstoff in Stickstoff.

Nr.	Spannung V in Volt	p_B $\cdot 10^{-3}$ mm	v $\cdot 10^3$ cm/sec	v_{\max} $\cdot 10^3$ cm/sec	v_1 $\cdot 10^3$ cm/sec	v_2 $\cdot 10^3$ cm/sec
3a	65 000	30	3,54	2,84	0,66	1,83
b	58 000	30	3,36	2,23	0,66	1,72
c	51 000	30	3,14	2,05	0,62	1,61
d	44 000	30	2,91	1,75	0,59	1,36
e	35 500	30	2,62	1,60	0,52	—
f	29 000	30	2,35	1,49	0,46	—
g	21 500	30	2,05	1,20	0,41	—
h	13 000	30	1,58	0,84	0,33	—
49a	68 000	43	3,62	2,55	—	—
2a	62 000	43	3,46	2,23	0,66	1,68
b	56 000	43	3,30	2,17	0,66	1,65
c	50 000	43	3,11	2,07	0,66	1,50
d	44 000	43	2,92	1,94	0,59	1,39
e	38 500	43	2,72	1,83	0,55	1,25
f	33 000	43	2,52	1,68	0,52	—
g	27 500	43	2,30	1,48	0,48	—
h	21 500	43	2,05	1,28	0,44	—
i	15 000	43	1,70	1,05	0,37	—
k	11 000	43	1,46	0,91	0,33	—
49b	68 000	66	3,62	2,53	—	—
5a	61 000	66	3,42	2,21	0,66	1,68
b	53 500	66	3,22	2,06	0,62	1,57
c	46 500	66	2,99	1,94	0,59	1,39
e	30 000	66	2,41	1,46	0,48	—
f	23 000	66	2,11	1,35	0,48	—
g	17 000	66	1,80	1,06	0,41	—
h	13 000	66	1,59	0,84	0,37	—
6a	60 000	85	3,42	2,34	—	—
b	54 000	85	3,22	2,05	—	—
c	46 000	85	2,99	1,86	—	—
d	38 500	85	2,73	1,67	—	—
e	30 000	85	2,41	1,61	—	—
f	23 000	85	2,11	1,32	—	—
g	17 000	85	1,80	0,90	—	—
h	13 000	85	1,59	0,80	—	—

stoff, auch wird das Minimum zwischen den beiden Maxima weniger schwach, so daß der Dopplereffekt einheitlicher aussieht. Diese Unterschiede machen sich erst oberhalb 50000 Volt bemerkbar. Wesentlich besteht der Einfluß des Sauerstoffs darin, daß die Hauptmenge der Geschwindigkeiten nach kleinen Werten wandert.

Tabelle IV.
Wasserstoff in Sauerstoff.

Nr.	Spannung V in Volt	P_B $\cdot 10^{-3}$ mm	v $\cdot 10^8$ cm/sec	v_{\max} $\cdot 10^8$ cm/sec	v_1 $\cdot 10^8$ cm/sec	v_2 $\cdot 10^8$ cm/sec
26a	72 000	10	3,73	2,48	0,81	—
27a	60 000	10	3,41	2,15	0,70	—
28a	47 500	10	3,03	1,75	0,66	—
29a	33 000	10	2,53	1,42	0,62	—
29b	23 000	10	2,11	1,13	0,57	—
26b	71 000	21	3,70	2,52	0,87	—
27b	60 000	21	3,40	2,12	0,76	—
28b	46 000	21	2,97	1,76	0,73	—
29c	34 000	21	2,57	1,45	0,65	—
29d	23 000	21	2,11	1,23	0,56	—
26c	69 000	39	3,65	2,37	0,88	—
27c	60 000	39	3,40	2,19	0,81	—
28c	47 000	39	3,02	1,86	0,74	—
29e	35 500	39	2,62	1,46	0,67	—
29f	21 000	39	2,01	1,10	0,54	—
26d	70 000	63	3,68	2,40	0,95	—
27d	59 000	63	3,39	2,14	0,88	—
28d	48 000	63	3,04	1,79	0,76	—
30a	35 500	63	2,62	1,60	0,74 (?)	—
30b	20 500	63	1,99	1,13	0,55	—
26e	69 000	99	3,65	2,33	—	—
27e	58 000	99	3,34	2,26 (?)	—	—
28e	47 000	99	3,00	1,82	0,82	—
30c	34 000	99	2,55	1,45	0,66	—
30d	23 000	99	2,11	1,10	0,52	—
26f	68 500	148	3,64	2,30	—	—
27f	60 000	148	3,40	2,23	—	—
28f	49 000	148	3,07	1,76	0,77	—
30e	34 500	148	2,58	1,58	0,67	—
30f	21 500	148	2,05	1,16	0,55	—

Diese Beeinflussung des Dopplereffekts ist immer noch erklärbar durch die Mengen Sauerstoff oder Stickstoff, die wegen der nicht vollkommenen Trennung in den Entladungsraum dringen. Aufnahmen, bei denen Sauerstoff oder Stickstoff dem Wasserstoff im Entladungsraum zugesetzt wurde¹⁾, während zur Leuchterregung Wasserstoff diente, machen diese Erklärung wahrscheinlich.

1) Vgl. § 7.

Möglicherweise besteht auch ein geringer Einfluß des Sauerstoffs oder Stickstoffs im Beobachtungsraum, da nach Versuchen von Rüchardt die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Verhältnisses der positiven zu den neutralen Wasserstoffatomen von dem die Umladung bewirkenden Gase beeinflußt wird. Allerdings ist die Wirkung der fremden Gase im Entladungsraum viel größer.

Um die Genauigkeit der Ausmessung und Reproduktion des Dopplereffekts feststellen zu können, wurden 6 Aufnahmen unter gleichen Bedingungen gemacht. Versuchsbedingungen und Geschwindigkeiten sind in Tabelle V enthalten.

Tabelle V.
Wasserstoff in Sauerstoff.

Numer	Spannung V in Volt	J Milliamp.	p_E $\cdot 10^{-3}$ mm	p_B $\cdot 10^{-3}$ mm	v_{\max} $\cdot 10^5$ cm/sec	v_1 $\cdot 10^5$ cm/sec	v_2 $\cdot 10^5$ cm/sec	V_{\max}
51a	69 000	1,3	29	6	2,45	0,71	1,68	31 000
b	69 000	1,3	29	6	2,42	0,74	1,68	30 500
c	69 000	1,3	29	6	2,45	0,76	1,65	31 000
d	69 000	1,3	29	6	2,49	0,79	1,68	32 500
e	69 000	1,3	29	6	2,43	0,74	1,68	30 500
f	69 000	1,3	29	6	2,48	0,79	1,72	32 000

Im Mittel ergeben sich hieraus folgende Werte:

V	$v_{\max} \cdot 10^5$	$v_1 \cdot 10^5$	$v_2 \cdot 10^5$	V_{\max}	$\frac{v_{\max}}{v}$	$\frac{v_2}{v_1}$	$\frac{V_{\max}}{V}$
69000	2,45	0,75	1,67	31200	0,67	2,21	0,45

Abgesehen von der Intensitätsverteilung ist kein wesentlicher Einfluß von Sauerstoff und Stickstoff hinter der Kathode auf den Dopplereffekt des Wasserstoffs festzustellen. In Fig. 4 ist das Verhältnis $v_{\max} : v$, v_2/v und v_1/v in Abhängigkeit von v für die Aufnahmen der Tabellen I, III und IV angegeben. Man sieht sofort die befriedigende Übereinstimmung bei allen drei anregenden Gasen. Wie bei den Aufnahmen 20—24 beziehen sich die dargestellten Verhältnisse auf Mittelwerte, da sich kein Einfluß des Gasdrucks zeigt.

Das Verhältnis $v_2 : v_1$ ist für die Aufnahmen in Stickstoff in Fig. 3 als Funktion der Spannung angegeben. Es fällt größer als 2:1 aus. Auch diese Werte sind gemittelt.

Es ist zu bemerken, daß in allen Fällen das Verhältnis $v_1 : v$ mit der Spannung abnimmt, während das für die andern Verhältnisse nicht der Fall ist. Durch dieses Zurückbleiben des langsamen Maximums wird das Anwachsen des Verhältnisses $v_2 : v_1$ mit der Spannung verursacht. Dieses Zurückbleiben hängt wahrscheinlich damit zusammen, daß schnelle Moleküle im Kathodenfall relativ seltener vorkommen als schnelle Atome.

§ 4. Vergleich mit anderen Beobachtungen.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die bisherigen Beobachtungen fast ausnahmslos eine Grenze des Dopplereffekts aufweisen. Der Vergleich wird sich also auf niedrige Spannungen beschränken müssen. Es fragt sich, wie weit die bei den eigenen Messungen gefundenen Streifen im Dopplereffekt identisch sind mit den bisher beobachteten.

Paschen¹⁾ gibt im Bereich von 500—1900 Volt die maximale Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit des Intensitätsmaximums eines schnellen Streifens an, den er als Streifen I bezeichnet. Die gleichen Werte eines langsamen Streifens II gibt er von 1200 Volt an. Nach Paschen wird der Streifen II oberhalb 2000 Volt vorherrschend. Stark und Steubing²⁾ erhalten bei 1200 Volt ebenfalls zwei Streifen, sie finden aber ab 3500 Volt ein noch schnelleres drittes Maximum, welches zwischen 6000—8000 Volt am besten an H_β beobachtbar ist. Wilsar findet keine solche Unterteilung des Dopplereffekts. In Fig. 5 sind die Verhältnisse $v_{\max} : v$, v_2/v und v_1/v der eigenen Messungen als Funktion von v angegeben für einen Bereich von $v = 0,5$ bis $3,0 \times 10^8$ cm/sec⁻¹ entsprechend einer Spannung von 1400—46000 Volt. Dazu sind die gleichen Verhältnisse der Streifen I und II von Paschen und Messungen von Wilsar³⁾ entnommene Werte eingezeichnet. Der Vergleich dieser Kurven macht es wahrscheinlich, daß der Paschen'sche Streifen II identisch ist mit dem langsamen Maximum v_1 .

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 23. S. 247. 1907.

2) J. Stark u. W. Steubing, Ann. d. Phys. 28. S. 974. 1909.

3) H. Wilsar, Ann. d. Phys. 39. S. 1251. 1912.

der eigenen Messungen. Der Streifen I von Paschen ist aber identisch mit dem schnellen Maximum v_2 der eigenen Messungen. Das mittlere Maximum v_1' , welches allerdings immer schwach auftritt, findet kein Gegenstück bei Paschen, möglicherweise ist es identisch mit einem der drei von Stark beobachteten Maxima. Das starke Aufbiegen der Kurve $v_1:v$ zu größeren Werten unterhalb 3000 Volt hängt wahrscheinlich damit zusammen, daß unterhalb dieser Spannung der schnelle Streifen, der hier nicht getrennt ist, intensiv wird, womit eine Verlagerung des Intensitätsmaximums zu relativ größeren Geschwindigkeiten verbunden ist. Auch das Intensitätsmaximum von Wilsar zeigt dieses Verhalten; bei ihm waren ebenfalls die beiden Streifen nicht getrennt.

Es ist schwer zu sagen, warum in den bisherigen Arbeiten ein weiteres Anwachsen des Dopplereffekts mit steigender Spannung nicht beobachtet wurde. Häufig lagen wesentlich andere Versuchsbedingungen vor.¹⁾ Aber wenn man auch von den Beobachtungen von Strasser, Paschen, Stark und Steubing, die ohne Durchströmung mit geschlossenem Rohr arbeiteten, absieht, bleibt immer noch der Widerspruch zu den Ergebnissen von Wilsar, Saxén und Vegard, deren Messungen unter ähnlichen Bedingungen ausgeführt sind wie die vorliegenden. Ein Unterschied besteht nur darin, daß in vorliegender Arbeit der Kanal länger und die Trennung besser ist und daß durch die Kathode hindurch abgepumpt wird. Eine weitere mögliche Abweichung liegt in der Ungenauigkeit der Spannungsmessung durch Funkenpotentiale. Jedenfalls beobachtet Wilsar nur den langsamen Dopplerstreifen v_1 , wie aus Fig. 5 hervorgeht.

Der Einfluß der Stromquelle wurde schon mitgeteilt. Bei Gleichstrom ist das Verhältnis $v_{\max}:v$ oberhalb 10000 Volt konstant gleich 0,675, während es bei Wechselstrom mit der Spannung zunimmt, bis es bei 70000 Volt diesen Betrag erreicht. Dieser Unterschied wurde mit der abweichenden Spannungsmessung bei Wechselstrom erklärt.

1) Bei H. Wilsar kann das Auftreten der Grenze dadurch vertuscht sein, daß er ohne Kondensor arbeitete und die Lichtstärke des Spektrographen nicht ausnutzte.

Der Einfluß der Stromstärke bei Gleichstrom wurde bei einer Spannung von 2150 und 1450 Volt untersucht zwischen 20 und 80 Milliampère Stromstärke. Die Dopplergeschwindigkeiten werden etwas kleiner mit wachsender Stromstärke.

Es wurden keine merklichen Änderungen des Dopplereffekts bei Röhren von 35—75 mm Durchmesser gefunden.

In einem nachfolgenden Abschnitt¹⁾ wird mitgeteilt, in welcher Weise eine Verunreinigung des Wasserstoffs im Entladungsraum durch Sauerstoff oder Stickstoff wirkt.

§ 5. Vergleich der Dopplerkurve mit der Teilchenzahlkurve der elektromagnetischen Analyse.

Retschinsky²⁾ vergleicht die Geschwindigkeitsverteilung des Dopplereffekts mit der auf elektromagnetischem Wege gefundenen Geschwindigkeitsverteilung der positiven Wasserstoffatome. Deren Energiekurve besitzt zwei Streifen, b und c , für die das Verhältnis $v_b:v = 0,82$ und $v_c:v = 0,6$ ist, wobei v_b und v_c die Geschwindigkeiten der Maxima der Energiekurve sind. In Fig. 5 sind diese beiden Bereiche eingezeichnet. Im Dopplereffekt sind keine Geschwindigkeiten vorhanden, die dem Streifen b entsprechen. Die gleiche Feststellung macht Retschinsky. Andererseits findet er in Übereinstimmung mit den vorliegenden Beobachtungen im Dopplereffekt einen langsamen Streifen d mit dem Wert $v_d:v = 0,25$, den die Energiekurve der positiven Wasserstoffatome nicht aufweist. Im Bereich des Streifens c finden auch Paschen und Stark und Steubing Dopplergeschwindigkeiten des Wasserstoffs. Retschinsky kann also keine Übereinstimmung zwischen Dopplereffekt und Energiekurve finden. Ebensowenig ist das auf Grund der vorliegenden Beobachtungen möglich. Obwohl die Umrechnung der auf photographischem Wege gewonnenen Energiekurve in Teilchenzahlkurve und die Umrechnung der Schwärzung in Intensität beim Dopplereffekt große Unsicherheiten enthält, liegt doch die genannte Abweichung weit außerhalb des möglichen Fehlers. Neuere Messungen der Teilchen-

1) Vgl. § 7.

2) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. 50. S. 369. 1916.

zahlkurve der positiven Wasserstoffatome mit dem Thermo-
element¹⁾ geben auch die kleinste Geschwindigkeit v_{\min} an, die
mit der Spannung wächst. Für diese liegt der Wert $v_{\min}:v$
bei 0,3, also oberhalb des Bereiches d , dem der langsame Be-
reich des Dopplereffekts entspricht.

Gegenüber der Differenz in den Geschwindigkeitswerten
zeigt sich eine merkliche Übereinstimmung in den Intensitäts-
verhältnissen. Zum Vergleich sind die Messungen von Döpel²⁾
herangezogen. Die Werte von $I_2:I_1$ (Tabelle VI), geben das

Tabelle VI.
Intensitätsverhältnis der Maxima.

Teilchenzahlkurve		Dopplerkurve		
Spannung V in Volt	$J_2 : J_1$	Nummer	Spannung V in Volt	$J_2 : J_1$
15 000	0,28	41c	31 500	0,33
23 000	0,49	41b	41 000	0,62
39 000	0,66	41a	50 000	0,61

Intensitätsverhältnis des schnellen Maximums zu dem lang-
samen an. Auch bei der Teilchenzahlkurve der positiven Wasser-
stoffatome wird mit der Spannung das schnelle Maximum relativ
zum langsamen intensiver. Diesem Vorgang entspricht die bei
Ablenkungsversuchen gemachte Beobachtung, daß mit steigen-
der Spannung die Moleküle im Kanalstrahl relativ zu den
Atomen weniger zahlreich sind.

Seitdem an homogenen Kanalstrahlen das Verhältnis der
positiven zu den neutralen Wasserstoffatomen in Abhängigkeit
von der Geschwindigkeit gemessen worden ist, erkennen wir,
daß notwendigerweise eine Abweichung zwischen Dopplereffekt
und Teilchenzahlkurve der positiven Atome bestehen muß. Denn
der Träger der Balmerlinien ist das neutrale Wasserstoffatom.
Nach Messungen von Rüchardt nimmt dieses Verhältnis mit
der Geschwindigkeit stark zu. Wenn man auch mit ihnen den
Unterschied zwischen Dopplereffekt und positiver Teilchenzahl-

1) R. Döpel, Ann. d. Phys. 1924.

2) R. Döpel, Münchener Dissertation 1924.

kurve quantitativ genau nicht erklären kann, so deuten sie doch auf die festgestellte Abweichung hin, nämlich auf ein Überwiegen der neutralen Teilchen bei kleinen, der positiven Teilchen bei größeren Geschwindigkeiten.

Eine wenig genau beantwortbare Frage bleibt die Abhängigkeit der freien Weglänge der Leuchterregung von der Geschwindigkeit, und ob diese Abhängigkeit für verschiedene Linien einer Serie eine verschiedene ist. Die früheren Beobachtungen des Dopplereffekts des Wasserstoffs hatten zu der Ansicht geführt, daß von einer Grenzggeschwindigkeit an die freie Weglänge der Leuchterregung unendlich groß würde. Das jetzt beobachtete stetige Fortschreiten des Dopplerendes verträgt sich aber mit dieser Annahme nicht. Wenn überhaupt die freie Weglänge der Leuchterregung mit der Geschwindigkeit größer wird, dann kann diese Abhängigkeit nicht so groß sein, wie sie bisher mit Rücksicht auf die Grenze des Dopplereffekts angenommen werden mußte.

Interessant ist ein Vergleich der freien Weglänge der Leuchterregung mit der freien Weglänge L_2 der Umladung der neutralen Wasserstoffatome. Nach Rüchardt¹⁾ nimmt diese mit der Geschwindigkeit bei konstantem Druck sowohl in Wasserstoff als auch in Sauerstoff und Stickstoff etwas ab. Bei ein und demselben Druck ist sie in den beiden letzten Gasen kleiner als in Wasserstoff. Dem entspricht ein stärkeres Leuchten in bewegter Intensität der Balmerlinien, wenn zur Anregung statt Wasserstoff eins der beiden anderen Gase von gleichem Druck dient.

Die maximale Geschwindigkeit des Dopplereffekts ist kleiner als die der positiven Wasserstoffteilchen. Diese Differenz wird zum Teil durch die Abhängigkeit des Verhältnisses der positiven zu den neutralen Teilchen von der Geschwindigkeit erklärt, zum Teil findet sie eine Erklärung in der Tatsache, daß verschiedene Versuchsbedingungen eine verschieden starke Ausnutzung der außerdem durch Funkenpotentiale wenig zuverlässig gemessenen Spannung mit sich bringen. Auch bei kleinen Geschwindigkeiten besteht ein ähnlicher Unterschied,

1) E. Rüchardt, Ann. d. Phys. 71. S. 377. 1923.

indem nach Beobachtungen von Döpel¹⁾ die kleinste Geschwindigkeit der positiven Teilchenzahlkurve proportional der Wurzel aus der Spannung wächst und größer ist als die des langsamen Maximums im Dopplereffekt.

Nach der Wienschen Theorie²⁾ wird eine Anzahl zum Leuchten einer Spektrallinie angeregter Atome durch Störungsstöße am Leuchten dieser Linie gehindert. Möglicherweise wird der Vergleich der positiven Teilchenzahlkurve mit der Dopplerkurve dadurch noch komplizierter gemacht, daß die freie Weglänge der Störung eine andere Funktion der Geschwindigkeit ist als die freie Weglänge der Leuchterregung.

§ 6. Die Geschwindigkeitsverteilung des Kanalstrahls.

Wenn man die beiden Maxima im Dopplereffekt Atomen zuordnet, die entweder als Molekül oder als Atom im Kathodenfall beschleunigt wurden, so müssen sich ihre Geschwindigkeiten wie $1:\sqrt{2}$ verhalten. Diese Erklärung fand Schwierigkeiten, da mitunter dieses Verhältnis größer, bis zu 1:2, gefunden wurde. Diese Erscheinung führte zu der Annahme der Bildung von Komplexen von Atom und Molekülen³⁾; das dritte Maximum wurde in Zusammenhang mit dem von Thomson beobachteten H_2 -Molekül gebracht.⁴⁾ Oder man nahm an, daß Atome und Moleküle verschiedenen großen Reibungswiderständen im Kathodenfall unterworfen sein sollten.⁵⁾

Die Annahme von allen möglichen e/m -Werten, bei der häufig mit noch nie beobachteten Ionenarten gerechnet wurde, ist allerdings reichlich willkürlich, auch kann man damit nicht die vollkommen kontinuierliche Geschwindigkeitsverteilung der Kanalstrahlen erklären. Um diesem Umstande gerecht zu werden, nehmen Gehrcke und Reichenheim⁶⁾ an, daß

1) R. Döpel, Ann. d. Phys. 1924.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 70. S. 1. 1923.

3) F. Paschen, Ann. d. Phys. 23. S. 247. 1907.

4) J. Stark u. W. Steubing, 28. S. 974. 1909.

5) F. Paschen, Ann. d. Phys. 23. S. 247. 1907.

6) E. Gehrcke u. O. Reichenheim, Verh. d. Deutschen Phys. Ges. 1910.

die Zone der Ionisation im Kathodenfall nicht räumlich genau definiert und für Atome und Moleküle an verschiedenen Stellen liegt. So werden nur verschieden große Bruchteile des Kathodenfalles geladen durchlaufen.

Die Beobachtung eines Dopplereffekts im Pinsel²⁾ erlaubt einen Einblick in die Vorgänge im Kathodenfall. Denn da die Balmerlinien vom neutralen Atom stammen, kann nur dann eine bewegte Dopplerkomponente im Pinsel zustande kommen, wenn im Kathodenfall Umladungen geladener Teilchen stattfinden. Über den Mechanismus von beschleunigten Atomen und Molekülen lagert sich also das statistische Gesetz der freien Weglängen der Umladung von geladenen und ungeladenen Teilchen, und bewirkt die beobachteten Abweichungen. Im allgemeinen durchläuft ein Kanalstrahlteilchen nur einen Teil des Kathodenfalles im geladenen Zustande. Auch ein Zerfall beschleunigter Moleküle in Atome findet bereits im Kathodenfall statt, denn dicht vor der Kathode beobachtet man bereits zwei Maxima¹⁾ im Dopplereffekt und ohne Zweifel hängt die Zahl der Maxima mit der Zahl von Ionenarten zusammen, die im Kathodenfall eine Beschleunigung erfahren.

Unter diesem Gesichtspunkte ist die Zuordnung eines bestimmten Bereiches im Dopplereffekt zu einer Ionengattung im Kathodenfall unnötig. Weiterhin weisen die Beobachtungen am Dopplereffekt der Balmerlinien bei Zusatz von Sauerstoff oder Stickstoff im Entladungsraum auf die Bedeutung der Umladungen im Kathodenfall hin.

Da das Verhältnis der Geschwindigkeiten der beiden Maxima mitunter auch bei der elektromagnetischen Analyse größer als $1:\sqrt{2}$ gefunden wird, kann man schließen, daß die freie Weglänge der Umladung der geladenen Wasserstoffmoleküle im Kathodenfall im Mittel kleiner ist als die der Atome.

Es läßt sich nicht angeben, ob die freien Weglängen der Umladung im Kathodenfall die gleichen oder andere sind, als wie sie hinter der Kathode gemessen wurden. W. Wien fand allerdings, daß die Umladungsverhältnisse nicht beeinflußt

1) Vgl. § 8.

wurden, wenn ein Kanalstrahl hinter der Kathode durch die Raumladung eines thermischen Elektronenstroms oder durch eine intensive Glimmentladung ging. Überhaupt ist die räumliche Elektronendichte viel zu gering, als daß man einen Einfluß erwarten könnte.

Beobachtungen des Dopplereffekts der Balmerlinien bei Zusatz eines fremden Gases im Entladungsraum, das Auftreten sehr langsamer rücklaufender Kanalstrahlen bei Doppleraufnahmen im Pinsel und schließlich die veränderliche Breite des Minimums zwischen bewegter und ruhender Intensität machen es wahrscheinlich, daß die kleinste Geschwindigkeit im gewöhnlichen Dopplereffekt keine Anregungsfrage ist, sondern daß langsamere neutrale Atome nicht vorhanden sind. Bei den Messungen von Döpel an der Teilchenzahlkurve der positiven Wasserstoffatome sind unterhalb einer mit der Spannung wachsenden Minimalgeschwindigkeit keine positiven Teilchen vorhanden und genau so wächst die kleinste Geschwindigkeit im Dopplereffekt der Funkenlinien des Sauerstoffs und Stickstoffs proportional der Wurzel aus der Entladungsspannung.

§ 7. Zusatz von Sauerstoff und Stickstoff im Entladungsraum.

Der Zusatz des fremden Gases erfolgte durch eine selbständige Kapillare, das Mischungsverhältnis wurde durch Messung der Partialdrucke festgestellt. Zur Leuchterregung hinter der Kathode diente das infolge nicht vollkommener Trennung übertretende Gasgemisch, beobachtet wurde wie sonst.

Die Beobachtung Strassers¹⁾, daß bei Zusatz von Stickstoff die Geschwindigkeit des Dopplereffekts klein wird und das Minimum zwischen ruhender und bewegter Intensität verschwindet, konnte nicht bestätigt werden. Die Daten der Aufnahmen mit Stickstoffzusatz sind Tabelle VII zu entnehmen. Es bleibt der gesamte Geschwindigkeitsbereich wie bei reinem Wasserstoff erhalten, die großen Geschwindigkeiten treten stärker hervor. Die Intensitätsverteilung wird sehr gleichmäßig, das Minimum zwischen bewegter und ruhender Intensität bleibt unverändert erhalten, das Minimum zwischen den beiden Maxima ist kaum mehr wahrnehmbar.

1) B. Strasser, Ann. d. Phys. 31. S. 890. 1910.

Tabelle VII.

Zusatz von Sauerstoff und Stickstoff im Entladungsraum.

Nr.	Gas	Spannung V in Volt	Mischungs- verhältnis H:O oder H:N	p_B $\cdot 10^{-3}$ m/m	v_{\max} $\cdot 10^8$ cm/sec	v_1 $\cdot 10^8$ cm/sec	v_{in} $\cdot 10^8$ cm/sec
62a	H in O	15 000	7,5:1	50	1,19	0,34	0,07
62c	H in H	13 000	—	6	1,14	0,54	0,21
63a	H + O	14 000	3:1	3	1,00	0,32	0,15
63b	in	14 000	11:10	6	0,93	0,26	0,12
63b	H + O	14 500	1:2,6	1,5	0,51	0,33	0,12
64d	H in N	14 500	13:1	24	1,19	0,48	0,14
64b	H in H	14 000	—	5	1,10	0,53	0,19
64e	H+N in	15 000	11:13	4	1,25	—	0,22
64c	H + N	18 000	1:5	3	1,27	—	—

Bei Zusatz von Sauerstoff, Tabelle VII, werden die Geschwindigkeiten des Dopplereffekts klein, so daß er fast so schmal wird wie die ruhende Linie. Bei geringem Sauerstoffzusatz sind schwach auch die größeren Geschwindigkeiten erhalten, diese verschwinden aber in dem Maße, wie der Sauerstoffzusatz wächst, in Aufnahme 63b, Tabelle VII, sind sie nicht mehr vorhanden. Das Minimum zwischen ruhender und bewegter Intensität bleibt erhalten, ist aber schmaler als bei reinem Wasserstoff.

An derselben Aufnahme 63b wurde der Dopplereffekt der Sauerstoff-Funkenlinie 4662,1 ausgemessen. Innerhalb der Fehlergrenzen ist dieser Dopplereffekt gleich dem von H_β . Während die Geschwindigkeiten von H_β klein werden, treten in der O-Linie nur die größeren Geschwindigkeiten auf. Diese Gleichheit legt die Vermutung nahe, daß Wasserstoff und Sauerstoff als gemeinsames Komplex im Kathodenfall beschleunigt wurden. Ein Komplex H_2O müßte wenigstens zwei Ladungen haben.

Die Wirkung dieser beiden Gase als Zusatz zum Wasserstoff im Entladungsraum macht es wahrscheinlich, daß der Einfluß, den sie hinter der Kathode als zum Leuchten anregende Atmosphäre ausübten, hauptsächlich durch die infolge nicht vollkommener Trennung in den Entladungsraum dringende

Verunreinigung veranlaßt wurde. Der Dopplereffekt der Balmerlinien ist also annähernd derselbe sowohl bei Anregung durch Wasserstoff als auch durch Sauerstoff und Stickstoff. Da nach Messungen von Rüchardt das Verhältnis der positiven zu den neutralen Wasserstoffatomen bis auf einen konstanten Faktor in allen drei Gasen ungefähr dieselbe Geschwindigkeitsabhängigkeit besitzt, bedeutet diese Übereinstimmung, daß das gleiche von der freien Weglänge der Leuchterregung in diesen drei Gasen gilt.

§ 8. Der Dopplereffekt im Pinsel.

Der Dopplereffekt im Pinsel wurde im vorliegenden Falle an den gleichen Entladungsröhren aufgenommen, mit denen die übrigen Doppleraufnahmen gemacht sind. Der Pinsel wurde in einem Winkel von 45° in verschiedenen Entfernungen von der Kathode anvisiert und mittels Kondensor auf dem Spalt des Spektrographen abgebildet. Beobachtet wurde H_β . Der Spektrograph hatte eine Dispersion von:

27,75	Å.-E. pro Millimeter bei	H_β
15,85	" " "	H_γ
12,15	" " "	H_δ

Die bis zum Ort der Aufnahme durchlaufene Potentialdifferenz wurde mit Hilfe des Lo Surdo-Effekts berechnet.¹⁾ Dieser wurde in der Weise aufgenommen, daß der Kondensor ein Bild des Pinsels des senkrecht stehenden Rohres auf dem dazu parallelen Spalt erzeugte. Ausgemessen wurden H_γ und

H_β . Das Integral: $V = \int_0^a \mathcal{E} dx$ wurde mit dem Planimeter

ausgerechnet, es liefert die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und einem Punkt im Pinsel. Die durchlaufene Potentialdifferenz ergibt sich als Differenz aus dem Kathodenfall und obiger Potentialdifferenz. Der Kathodenfall wurde dabei zu 80 Proz. der Entladungsspannung angenommen.

In Übereinstimmung mit Strasser²⁾ wird der Dopplereffekt in größerer Entfernung von der Kathode sehr klein, auch ist das Minimum zwischen ruhender und bewegter

1) E. Brose, Ann. d. Phys. 58. S. 731. 1919.

2) B. Strasser, Ann. d. Phys. 31. S. 890. 1910.

Intensität immer vorhanden. Die ruhende Intensität im Pinsel ist relativ zum Dopplereffekt stärker als hinter der Kathode, dieser aber anscheinend ebenso intensiv wie hinter der Kathode. Unmittelbar vor der Kathode sind bei einer Spannung von 33000 und 47000 Volt die bekannten zwei Maxima vorhanden, hier hat auch die Maximalgeschwindigkeit schon ihren vollen Wert erreicht, den sie auch hinter der Kathode besitzt. Trotzdem ist die Dopplerkurve an der Kathode nicht identisch mit der hinter ihr unter gleichen Bedingungen aufgenommenen, an der Kathode sind die größeren Geschwindigkeiten verhältnismäßig viel weniger intensiv vorhanden, was seinen Ausdruck darin findet, daß die Geschwindigkeiten der Intensitätsmaxima noch nicht ihren vollen Wert erreicht haben. Wahrscheinlich befindet sich der Kanalstrahl an der Kathode noch nicht im Gleichgewicht wie in größerer Entfernung hinter ihr. Bei einigen Aufnahmen war rücklaufende bewegte Intensität von sehr kleiner Geschwindigkeit vorhanden. In verschiedenen Entfernungen von der Kathode entsprach die Maximalgeschwindigkeit in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen hinter der Kathode der durchlaufenen Potentialdifferenz.

Diese Beobachtungen wurden mit Gleichstrom bei 16000 und 33000 Volt, mit Wechselstrom bei 47000 Volt aufgenommen. Merkliche Unterschiede zeigten sich nicht. Hier und bei den Aufnahmen des Lo Surdo-Effekts hatte das Rohr einen Durchmesser von 38 mm. Dieser wurde mit Gleichstrom bei 33000 Volt aufgenommen und lieferte als größte Feldstärke 14000 Volt/cm in 2,5 mm Abstand von der Kathode. Eine Aufnahme mit Wechselstrom bei 47000 Volt gab genau so scharfe Komponenten der Aufspaltung und eine maximale Feldstärke von 17500 Volt/cm in derselben Entfernung. Solche Aufnahmen mit Wechselstrom wurden mit dem gleichen Ergebnis mehrere gemacht; auch bei Betrieb mit einem Induktor besteht also im Kathodenfall ein stationäres elektrisches Feld.

§ 9. Der Dopplereffekt an den Funkenlinien des Sauerstoffs und Stickstoffs.

W. Wien¹⁾ hat nachgewiesen, daß der Träger der Funkenlinien des Sauerstoffs und Stickstoffs geladen ist. Dieser Um-

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 69. S. 325. 1922.

stand liefert dem Vergleich zwischen Dopplereffekt und den Ergebnissen der elektromagnetischen Analyse wesentlich günstigere Bedingungen als sie beim Wasserstoff vorlagen, denn in diesem Falle ist die Geschwindigkeitsverteilung des Trägers des Spektrums elektromagnetisch direkt meßbar. Zwar ist die Zahl der Ladungen nicht gemessen, aber wegen der großen Intensität der Funkenlinien muß man in Übereinstimmung mit Forderungen der Theorie den Träger im einfach positiv geladenen Atom vermuten, welches bei Ablenkungsversuchen auch sehr intensiv vorhanden ist. Bis auf eine etwaige Abhängigkeit der freien Weglänge der Leuchterregung von der Geschwindigkeit wird man also erwarten können, daß der Dopplereffekt der Funkenlinien dieser Gase mit der Teilchenzahlkurve des einfach positiv geladenen Atoms übereinstimmt.

Retschinsky¹⁾ stellt einen Vergleich zwischen Dopplereffekt dieser Funkenlinien an und findet ähnliche Bereiche wie bei Wasserstoff. Hier sind auch die bisherigen Messungen angegeben.

Auffallend an diesen Linien ist es, daß ihr Dopplereffekt verhältnismäßig viel größere Geschwindigkeiten zeigt als der der Balmerlinien. Außerdem ist bei ihnen das Minimum zwischen ruhender und bewegter Intensität breiter als beim Wasserstoff und wird mit steigender Spannung immer breiter. Dieses Verhalten erinnert an die Teilchenzahlkurve der positiven Wasserstoffatome. Auch diese Analogie deutet darauf hin, daß der Träger der Funkenlinien geladen ist.

Dopplereffekt des Stickstoffs.

Bei den vorliegenden Messungen wurde der Dopplereffekt an der Funkenlinie 4530,3 beobachtet. Zur Aufnahme dienten dieselben Röhren wie sie beim Wasserstoff verwendet wurden. Den Strom lieferte ein Induktorium. Der Stickstoff wurde einer Bombe entnommen und über Phosphorpentoxyd getrocknet. Die Dispersion des Spektrographen betrug bei der genannten Linie 19,35 Å.-E. pro mm. Im Bereich von 5000 bis 4400 Å.-E. zeigten folgende Linien Dopplereffekt:

5005,7	4643,4	4601,3	4432,0
5002,7	4630,9	4530,3	

1) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. 50. S. 369. 1916.

Tabelle VIII.

Stickstoff in Stickstoff. Funkenlinie N 4530,3.

Nr.	Spannung V in Volt	J Milliamp.	p_E $\cdot 10^{-3}$ m/m	p_B $\cdot 10^{-3}$ m/m	v_{\max} $\cdot 10^8$ cm/sec	v_{\min} $\cdot 10^8$ cm/sec	v_1 $\cdot 10^8$ cm/sec	v_2 $\cdot 10^8$ cm/sec	$v_2:v_1$	V_{\max}
75b	64 000	1,2	5,2	24	0,73	0,30	0,45	0,66	1,46	38 000
73c	58 000	1	5,5	23	0,68	0,26	0,45	0,58	1,30	33 600
73d	48 000	1	7,0	22	0,64	0,23	0,38	—	—	29 700
75a	37 000	1,2	9,0	24	0,58	0,21	0,35	0,53	1,50	24 000

Die Versuchsbedingungen der ausgewerteten Aufnahmen sind Tabelle VIII zu entnehmen, im Raum hinter der Kathode befand sich Stickstoff. In einem Spannungsbereich von 37 000 bis 64 000 Volt wurden zwei Schwärzungsmaxima beobachtet, von denen das langsamere das intensivere ist. Ihre Geschwindigkeiten verhalten sich genähert wie $1:\sqrt{2}$. Die Schwärzungskurven dieser Aufnahmen sind in Fig. 6 wiedergegeben, sie wurden mit dem Hartmannschen Photometer ausgemessen. In Tab. VIII liegt der aus dem maximalen Dopplereffekt berechneten Spannung V_{\max} ein einfach geladenes Stickstoffatom zugrunde. Diese Spannung bleibt immer kleiner als die Entladungsspannung V ; die Annahme mehrfach geladener Atome ist nicht nötig.

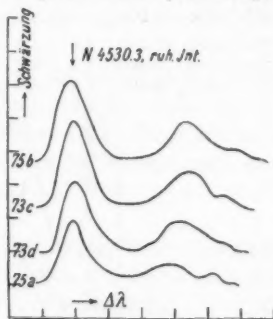


Fig. 6.

Diese Ergebnisse stimmen vollkommen mit den Messungen von Vegard¹⁾ überein. Das Minimum zwischen ruhender und bewegter Intensität wird mit wachsender Spannung breiter und ist nicht ganz schwärzungsfrei. Die Übereinstimmung mit der Teilchenzahlkurve des einfach positiv geladenen Atoms ist befriedigend.

Dopplereffekt des Sauerstoffs.

Die Beobachtungen an den Funkenlinien des Sauerstoffs wurden mit derselben Versuchsanordnung ausgeführt. Außer

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. 41. S. 625. 1913.

an den bereits bekannten Funkenlinien wurde an mehreren anderen ein Dopplereffekt gleicher Art festgestellt. Ausgemessen wurden die Funkenlinien 4591,6 und 4253,76, bei denen die Dispersion des Spektrographen 20,6 bzw. 14,3 Å.-E. pro mm betrug. Die Versuchsbedingungen dieser Aufnahmen sind in Tabelle IX angegeben, die Anregung zum Leuchten erfolgte durch Sauerstoff.

Tabelle IX.

Sauerstoff in Sauerstoff. Funkenlinien.

Nr.	Linie	V in Volt	J Millamp.	p_E · 10 ⁻³ m/m	p_B · 10 ⁻³ m/m	v_{\max} · 10 ⁶ cm/sec	v_{\min} · 10 ⁶ cm/sec	v_1 · 10 ⁶ cm/sec	v_2 · 10 ⁶ cm/sec	$v_2 : v_1$	V_{\max}
64a	4254	21 000	1,5	8,6	32	0,48	0,15	0,30	—	—	19 200
71d	4254	42 000	3,0	5,7	0,5	0,60	—	0,39	0,53	1,36	30 000
71a	4254	50 000	1,3	5,4	0,5	0,68	0,27	0,43	0,60	1,40	38 500
69b	4254	58 000	1,3	5,0	6,5	0,77	0,30	0,47	0,65	1,38	50 000
71d	4592	42 000	3,0	5,7	0,5	0,63	—	0,36	—	—	38 000
71a	4592	50 000	1,3	5,4	0,5	0,74	—	0,42	—	—	45 000
69b	4592	58 000	1,3	5,0	6,5	0,83	—	0,45	—	—	57 500

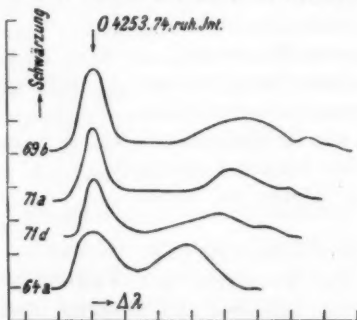


Fig. 7.

Der Verlauf des Dopplereffekts ist ähnlich dem der Funkenlinien des Stickstoffs. In Fig. 7 sind die Schwärzungskurven der Linie 4254 angegeben. Bei der Linie 4592 überlagert sich der Dopplereffekt der Linie 4596,8, hier ist auch das schnelle Maximum nur undeutlich ausgeprägt. Das Minimum zwischen ruhender und bewegter Intensität ist breit und wächst

mit der Spannung. Da die Linie 4254 sehr viel schwächer ist als die andere, fällt ihre Maximalgeschwindigkeit kleiner aus als bei jener. Die Maximalgeschwindigkeit ist immer kleiner als die der vollen Entladungsspannung entsprechende Geschwindigkeit, die mit einer Ladung berechnet wird; bei der intensiven Linie 4592 nähert sie sich diesem Werte stark. Die Geschwindigkeiten der beiden Schwärzungsmaxima verhalten sich annähernd wie $1:\sqrt{2}$.

Die Übereinstimmung mit den Bereichen von Retschinsky ist gut. Sehr wahrscheinlich ist daher der Träger der Funkenlinien des Sauerstoffs das einfach positiv geladene Sauerstoffatom.

Bei Zusatz von Wasserstoff zum Sauerstoff im Entladungsraum treten im Dopplereffekt der Funkenlinien die großen Geschwindigkeiten relativ viel stärker hervor, ohne daß aber der absolute Betrag der Maximalgeschwindigkeit wesentlich geändert wird. Hier sei auf die Veränderung hingewiesen, welche der Dopplereffekt der Balmerlinien unter gleichen Umständen erfährt.

Bei beiden Gasen zeigt sich in keiner Weise die von Wilsar beobachtete Grenze des Dopplereffekts auch nur angedeutet. Deren Existenz war auch weniger sicher als beim Wasserstoff da verschiedene gegenteilige Beobachtungen¹⁾ vorlagen.

Es ist häufig versucht worden, aus der Größe des Dopplereffekts auf den Träger von Spektrallinien zu schließen. Ein solches Verfahren ist schon dadurch ein bedingtes, daß für die Geschwindigkeit eines Kanalstrahlteilchens vor allem sein Ladungszustand im Kathodenfall maßgebend ist, während bis zur Stelle der Beobachtung unkontrollierbare Umladungen stattfinden können. Umgekehrt lag der Versuch nahe, auf die Ionenarten im Kathodenfall zu schließen. Bei diesen Versuchen spielte eine große Rolle die Vorstellung, daß bei den Funkenlinien analoge Verhältnisse vorliegen müßten wie bei den Balmerlinien. So kamen die vielfachen Annahmen zwei- und dreifach geladener Sauerstoff- oder Stickstoffatome als im Kathodenfall beschleunigte Ionen oder als Träger der Funkenlinien zustande.

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. 41. S. 625. 1913.

Aber nach dem heutigen Stande der Dinge wissen wir, daß ein großer Unterschied vorhanden ist zwischen dem Dopplereffekt der Balmerlinien und dem der Funkenlinien, indem erstere vom neutralen, letztere vom geladenen Atom herrühren. Wilsar¹⁾, der besonders große Geschwindigkeiten im Dopplereffekt der Funkenlinien beobachtet, kommt für seine größten Dopplergeschwindigkeiten, die einen verhältnismäßig kleinen und wenig intensiven Bereich ausmachen, vollkommen mit der Beschleunigung zweifach geladener Atome aus.

Wenn wir auch die Verhältnisse im Kathodenfall nicht kennen, so ist es andererseits auch nicht berechtigt, alle möglichen Arten von nicht nachgewiesenen Ionen anzunehmen. Nach den obenstehenden Feststellungen erfordern die Beobachtungen des Dopplereffekts der Funkenlinien des Sauerstoffs und des Stickstoffs nur die Existenz von einfach geladenen Atomen und Molekülen und von zweifach geladenen Atomen in geringerer Anzahl. Diese drei Ionenarten sind auch nachgewiesen; von den beiden Atomionen ist das einfach geladene weitaus am intensivsten vorhanden. Das zweifach geladene Atom scheint nicht immer aufzutreten und ist von J. J. Thomson²⁾ und Aston³⁾ beobachtet worden. Es ist natürlich wahrscheinlich, daß ebenso wie beim Wasserstoff die Umladungen im Kathodenfall eine große Rolle spielen.

Nach allem diesen liegt es sehr nahe, das einfach positiv geladene Atom für den Träger der Funkenlinien des Sauerstoffs und des Stickstoffs zu erklären.

Über eine etwaige Abhängigkeit der freien Weglänge der Leuchterregung dieser Träger von der Geschwindigkeit läßt sich nichts sagen, da die bisherigen elektromagnetischen Messungen keinen Vergleich der Intensitäten erlauben. Für eine solche Untersuchung liegen die Verhältnisse hier besonders günstig, da die Geschwindigkeitsverteilung des Trägers elektromagnetisch direkt meßbar ist.

Die verhältnismäßig geringen Geschwindigkeiten im Dopplereffekt der Balmerlinien haben ihren Grund darin, daß der

1) H. Wilsar, Ann. d. Phys. 39. S. 1251. 1912.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) 24. S. 209. 1912.

3) F. W. Aston, Phil. Mag. 39. S. 618. 1920.

Träger ungeladen ist. Nun haben die Bogenlinien des Stickstoffs und die Serienlinien des Sauerstoffs einen kleineren Dopplereffekt als die Funkenlinien. In Analogie zum Wasserstoff wird man also schließen, daß ihr Träger das neutrale Atom ist. In der Tat entspricht das den Forderungen der Theorie und ist durch Beobachtungen von W. Wien¹⁾ nachgewiesen. Die damit gemachte Annahme, daß das Verhältnis zwischen positiven und neutralen Teilchen sich ähnlich verhält wie beim Wasserstoff, ist berechtigt, da auch sonst viele Analogien zwischen den Kanalstrahlen des Wasserstoffs, Sauerstoffs und Stickstoffs bestehen.

Zusammenfassung.

1. Der Dopplereffekt des Wasserstoffs wird an H_β im Bereich von 1400 bis 70000 Volt untersucht. Eine Grenze des Dopplereffekts wird nicht gefunden. Die maximale Geschwindigkeit des Dopplereffekts wächst bei höheren Spannungen proportional der Wurzel aus der Entladungsspannung.

2. Die Geschwindigkeiten der Schwärzungsmaxima verhalten sich oberhalb 40000 Volt nicht wie $\sqrt{2}:1$, sondern dieses Verhältnis ist größer als 2:1 und wächst mit der Spannung.

3. Der Dopplereffekt von H_β ist bei Anregung durch Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff annähernd identisch. Beeinflussungen werden durch Verunreinigung des Wasserstoffs im Entladungsraum infolge nicht vollkommener Trennung der Gase erklärt.

4. Es wird der Einfluß einer Sauerstoff- und einer Stickstoffbeimengung im Entladungsraum untersucht. Bei Zusatz von Sauerstoff wird der Dopplereffekt des Wasserstoffs relativ klein und homogen; bei Zusatz von Stickstoff bleibt der ganze Geschwindigkeitsbereich wie bei reinem Wasserstoff erhalten.

5. Der Einfluß von Stromstärke, Stromart und Röhrenform wird unwesentlich gefunden.

6. Die Differenz zwischen Dopplereffekt der Balmerlinien und der Teilchenzahlkurve der positiven Wasserstoffatome der elektromagnetischen Analyse wird als notwendig erkannt, weil

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 69. S. 325. 1922.

der Träger der Balmerlinien ungeladen ist und das Verhältnis der positiven zu den neutralen Atomen des Wasserstoffs stark von der Geschwindigkeit abhängt.

7. Die freie Weglänge der Leuchterregung der neutralen Wasserstoffatome besitzt nicht die starke Geschwindigkeitsabhängigkeit, auf welche frühere Beobachtungen einer Dopplergrenze hinweisen. Sie wird mit der freien Weglänge der Umladung der neutralen Wasserstoffatome verglichen.

8. Der Dopplereffekt von H_{β} wird im Pinsel in mehreren Abständen von der Kathode untersucht und die durchlaufene Potentialdifferenz durch den Lo Surdo-Effekt gemessen. Die Maximalgeschwindigkeit des Dopplereffekts entspricht an jeder Stelle der durchlaufenen Potentialdifferenz in derselben Weise wie hinter der Kathode. An der Kathode ist die Geschwindigkeitsverteilung des Dopplereffekts nicht identisch mit der in größerer Entfernung hinter ihr gemessenen, da sich der Kanalstrahl noch nicht im Gleichgewicht befindet.

9. Die kleinste Geschwindigkeit im gewöhnlichen Dopplereffekt ist nicht durch Anregungsverhältnisse bedingt.

10. Es wird auf die Bedeutung der Umladungsvorgänge im Kathodenfall für die Geschwindigkeitsverteilung des Kanalstrahls hingewiesen.

11. Der Dopplereffekt der Funkenlinien des Sauerstoffs und des Stickstoffs ist annähernd identisch mit der Teilchenzahlkurve der einfach geladenen Atome O^+ bzw. N^+ . Er besitzt zwei Schwärzungsmaxima, deren Geschwindigkeiten sich wie $\sqrt{2}:1$ verhalten. Die Minimalgeschwindigkeit, die Geschwindigkeiten der beiden Maxima und die maximale Geschwindigkeit wachsen proportional der Wurzel aus der Spannung. Wegen der vorhandenen Identität wird auf die einfach positiv geladenen Sauerstoff- bzw. Stickstoffatome als Träger der Funkenlinien geschlossen.

12. Die größten Geschwindigkeiten im Dopplereffekt der Sauerstoff-Funkenlinie 4591,6 deuten auf die Existenz von zweifach geladenen Sauerstoffatomen im Kathodenfall hin.

13. Der Unterschied zwischen dem Dopplereffekt der Funkenlinien des Sauerstoffs und des Stickstoffs einerseits und dem der Balmerlinien andererseits wird dadurch erklärt, daß

der Träger der Funkenlinien geladen ist, während die Balmerlinien vom neutralen Wasserstoffatom herrühren.

14. In Analogie zum Dopplereffekt der Balmerlinien wird der Träger der Bogenlinien des Stickstoffs und der Serienlinien des Sauerstoffs im neutralen Atom vermutet, was mit Beobachtungen von W. Wien übereinstimmt.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität München ausgeführt. Herrn Geheimrat Prof. Dr. W. Wien möchte ich an dieser Stelle für Anregung zu dieser Arbeit und deren Förderung meinen wärmsten Dank sagen. Desgleichen danke ich Herrn Dr. E. Rüchardt für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat.

München, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 11. April 1924.)

**5. Zur Veröffentlichung des Hrn. W. Kast:
 „Anisotropie der flüssigen Kristalle bezüglich
 ihrer Dielektrizitätskonstanten und ihrer
 elektrischen Leitfähigkeit“¹⁾;
 von Mieczysław Jeżewski.**

Unabhängig von obiger Arbeit des Hrn. Kast, welche im Juni 1923 an die Redaktion der Annalen eingesandt und im Heft 1/2 1924 veröffentlicht wurde, habe ich im Frühjahr 1923 im Physikalischen Institut der Universität Krakau Untersuchungen über den Einfluß des magnetischen Feldes auf die Dielektrizitätskonstante der flüssigen Kristalle mit ähnlichem Ergebnisse durchgeführt. Meine Arbeit wurde in der Sitzung der Polnischen Physikalischen Gesellschaft in Krakau am 20. Juni 1923 referiert und am 2. Juli 1923 der Polnischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt und dieselbe ist im Anzeiger der Polnischen Akademie der Wissenschaften²⁾, sowie im Journal de Physique et le Radium³⁾ abgedruckt.

1) W. Kast, Ann. d. Phys. 73. S. 145. 1924.

2) Bull. de l'Académie Polonaise des Sc. et d. L. Cl. de Sc. Mat. et Nat. Série A. S. 43. 1923.

3) Influence du champ magnétique sur les constantes diélectriques des cristaux liquides. Le Journal de Physique et le Radium 5. S. 59. 1924.

(Eingegangen 3. Juni 1924.)

m
m
25
r-
lie
m
og
m
su
m
6-

at.

100
24.